برگه سؤال	
نام درس: **دیفرانسیل**	**آزمون پایانی نوبت اول**
نام دبیر: **ترکیبی**	سال تحصیلی ۹۷-۹۶
زمان: **۱۲۰ دقیقه**	نام و نام خانوادگی:
تاریخ: **۹۶/۱۰/۹**	
تعداد صفحات: **۲**	**پایه چهارم**

باسمه تعالی

دبیرستان کمال

۱. اگر برای هر عدد حقیقی $\varepsilon > 0$ داشته باشیم $0 \le x < \varepsilon$، ثابت کنید که $x = 0$ (۱ نمره)

۲. اشتراک دو بازه‌ی $(-1, 6)$ و $(-2, 4)$ را به صورت یک همسایگی متقارن نوشته و مرکز و شعاع آن را تعیین کنید. (۱ نمره)

۳. اگر L حد دنباله ی $a_n = \dfrac{3n-2}{2n+1}$ باشد، تعیین کنید چند جمله از این دنباله در نامساوی $|a_n - L| < 0/01$ صدق نمی کند؟ (۱نمره)

۴. نشان دهید دنباله ی $\left\{\dfrac{n^2}{2^n}\right\}$ برای $n \ge 3$، یکنوا و کراندار است. (۱نمره)

۵. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید: (۱/۵ نمره)

در بازه‌ی $A = [1, 3)$، عدد ۳ ماکسیمم A است.

حد دنباله‌ی $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{3}}$ برابر است با e^3 .

دنباله‌ی $\left\{3 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$ یک دنباله‌ی نزولی است.

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. (۱ نمره)

حد دنباله‌ی $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{3}}$ برابر .... می‌شود.

طبق اصل موضوع تمامیت در باب اعداد حقیقی، یک مجموعه‌ی ناتهی از اعداد حقیقی که دارای کران بالا باشد دارای .... است.

۶. حدود توابع زیر را محاسبه کنید. (۳ نمره)

الف) $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 9) \times \cos \dfrac{1}{x-3}$

ب) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{[x] - 2}{x - 3}$

ج) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x - \sqrt{9x^2 - 4x + 1}}{6x - 1}$

۷. ثابت کنید تابع $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ در نقطه‌ی $x = 0$ حد ندارد. (۱ نمره)

۸. با استفاده از دنباله ها، ثابت کنید تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 5 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ در $x = 2$ حد ندارد. ($\mathbb{Q}$ مجموعه اعداد گویاست.) (۱ نمره)

۹. حدهای زیر را به دست آورید. (۱/۵ نمره)

$\lim\limits_{x \to 0} x[\dfrac{1}{x}]$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - 3x + 2}$

۱۰. مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع زیر در $x = ۳$ پیوسته باشد. (۱ نمره)

$$f(x) = \begin{cases} ۲[x] + ۳a & x > ۳ \\ \cos(x - ۳) & x = ۳ \\ \frac{|x-۳|}{x^۲-۹} + b & x < ۳ \end{cases}$$

۱۱. حدودی برای m طوری بیابید، که یکی از ریشه های معادله ی $x^۲ + (۲m - ۱)x - ۳m = ۰$ بین دو عدد ۱ و ۱− باشد. (۱ نمره)

۱۲. معادله‌ی تمام خطوط مجانب منحنی $f(x) = x\sqrt{\frac{x+۱}{x-۱}}$ را به دست آورید. (۲ نمره)

۱۳. کلیه‌ی مجانب‌های تابع $f(x) = \frac{x^۲ - ۳x + ۳}{x - ۲}$ را در صورت وجود بیابید. (۱ نمره)

۱۴. تابع f با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} a + x & , \quad x < ۱ \\ b\sqrt[۳]{x} & , \quad x \geq ۱ \end{cases}$ مفروض است. مقادیر a و b را چنان بیابید که f در $x_۰ = ۱$ مشتق پذیر باشد. (۱ نمره)

۱۵. برای تابع زیر $D_{f'}$ را مشخص کنید. (۱ نمره)

$$f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^۲ + ۱}}$$

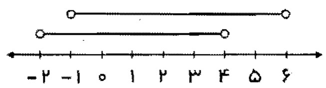
۹۶/۱۰/۹

دیفرانسیل

۱. اگر $x = ۰$ باشد که حکم برقرار است. حال فرض کنیم چنین نباشد (فرض خلف) یعنی $x \neq ۰$. لذا $x > ۰$ چون عبارت برای هر $\varepsilon > ۰$ برقرار است، قرار می دهیم $x = \varepsilon$. در نتیجه $۰ \leq x < x$. که این تناقض است پس فرض خلف باطل است، یعنی $x = ۰$.

۲. ابتدا اشتراک دو بازه را می یابیم.

$$(-۲,۴) \cap (-۱,۶) = (-۱,۴)$$



حال برای نوشتن این بازه بصورت یک همسایگی متقارن، باید نقطه‌ی میانه بازه را بیابیم.

$$(-۱,۴) \rightarrow \frac{۴+(-۱)}{۲} = \frac{۳}{۲} \quad \text{مرکز همسایگی}$$

بنابراین:

$$x \in (-۱,۴) \rightarrow -۱ < x < ۴ \rightarrow -۱ - \frac{۳}{۲} < x - \frac{۳}{۲} < ۴ - \frac{۳}{۲}$$

$$-\frac{۵}{۲} < x - \frac{۳}{۲} < \frac{۵}{۲} \rightarrow \text{مطابق ویژگی قدر مطلق} \left| x - \frac{۳}{۲} \right| < \frac{۵}{۲} \rightarrow \frac{۵}{۲} \text{ شعاع همسایگی است}$$

یادآوری ویژگی قدر مطلق:

$$|u| < k \rightarrow -k < u < k$$

بطورکلی برای نوشتن بازه‌ی (m,n) بصورت یک همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع r از روابط زیر استفاده می کنیم.

$$\begin{cases} a = \dfrac{m+n}{۲} & \text{مرکز} \\ r = \dfrac{n-m}{۲} & \text{شعاع} \end{cases}$$

۳. ابتدا حد دنباله را بدست می آوریم. لذا داریم:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{۳n-۲}{۲n+۱} = \lim_{n \to +\infty} \frac{۳n}{۲n} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow L = \frac{۳}{۲}$$

$$|a_n - L| = \left|\frac{۳n-۲}{۲n+۱} - \frac{۳}{۲}\right| < \frac{۱}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{۲(۳n-۲) - ۳(۲n+۱)}{۲(۲n+۱)}\right| < \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow \left|-\frac{۷}{۴n+۲}\right| < \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۷}{۴n+۲} < \frac{۱}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow \frac{۴n+۲}{۷} > ۱۰۰ \Rightarrow ۴n+۲ > ۷۰۰ \Rightarrow ۴n > ۶۹۸ \Rightarrow n > \frac{۶۹۸}{۴} = ۱۷۴/۵ \Rightarrow n \geq ۱۷۵$$

در نتیجه ۱۷۴ جمله ی اول دنباله ($a_۱$ تا $a_{۱۷۴}$) در نامساوی صدق نمی کنند.

.۴

$$a_n = \frac{n^۲}{۲^n}, \; n \geq ۳ \Rightarrow |a_n| < ۲ \text{ دنباله کراندار است}$$

$$\frac{۹}{۸}, ۱, \frac{۲۵}{۳۲}, \cdots \Rightarrow \text{دنباله نزولی است } ۰$$

$$a_{n+۱} \leq a_n \Leftrightarrow \frac{(n+۱)^۲}{۲^{n+۱}} \leq \frac{n^۲}{۲^n} \Leftrightarrow n^۲ + ۲n + ۱ \leq ۲n^۲ \Leftrightarrow n^۲ - ۲n \geq ۱ \Leftrightarrow n(n-۲) \geq ۱$$

رابطه ی اخیر به ازای $n \geq ۳$ همواره برقرار است.

۵.

۶. نادرست است زیرا در بازه‌ی $A = [۱ , ۳]$ ، عدد ۳ کوچکترین کران بالای مجموعه‌ی A است که عضو مجموعه نیست. توجه کنیم که چنانچه کوچکترین کران بالای مجموعه، عضو مجموعه باشد، آن را عضو ماکسیمم می گوییم.

۷. نادرست است زیرا می‌دانیم $\lim_{n\to+\infty} (۱ + \frac{۱}{n})^{n} = e$ بنابراین:

$$\lim_{n\to+\infty} (۱+\frac{۱}{n})^{\frac{n}{۳}} = \lim_{n\to+\infty} \left((۱+\frac{۱}{n})^{n}\right)^{\frac{۱}{۳}} = e^{\frac{۱}{۳}}$$

۸. درست است زیرا با نوشتن جملات دنباله واضح است که این دنباله، نزولی است.

$$a_۱ = ۳ + \frac{۱}{۲} \quad , \quad a_۲ = ۳ + \frac{۱}{۴} \quad , \quad a_۳ = ۳ + \frac{۱}{۸} \quad , \cdots$$

۹.

$$\lim_{n\to+\infty} (۱+\frac{۱}{n})^{\frac{n}{۳}} = \lim \left(\underbrace{(۱+\frac{۱}{n})^{n}}_{e}\right)^{\frac{۱}{n}\times\frac{n}{۳}} = \lim e^{\frac{۱}{n}\times\frac{n}{۳}} = e^{\frac{۱}{۳}}$$

۱۰. کوچک ترین کران بالا

۱۱.

الف) $\lim_{x\to۳} (x^۲ - ۹) = ۰ \;,\; \left|\cos\frac{۱}{x-۳}\right| \leq ۱$ کراندار $\Rightarrow \lim_{x\to۳} (x^۲-۹)\cos\frac{۱}{x-۳} = ۰$

ب) $\lim_{x\to۳^-} \frac{[x]-۲}{x-۳} = \lim_{x\to۳^-} \frac{۲-۲}{x-۳} = ۰$

ج) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{۲x - |x|\sqrt{۹ - \frac{۴}{x} + \frac{۱}{x^۲}}}{x(۶-\frac{۱}{x})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{۲x+۳x}{۶x} = \frac{۵}{۶}$$

۱۲. ابتدا باید دو دنباله معرفی کنیم که به عدد صفر همگرا باشند.

$$\begin{cases} a_n = \frac{۱}{۲n\pi} \\ b_n = \frac{۱}{۲n\pi + \frac{\pi}{۲}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = ۰ \\ f(a_n) = \sin(۲n\pi) \;,\; f(b_n) = \sin(۲n\pi + \frac{\pi}{۲}) = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = ۰ \\ \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = ۱ \end{matrix}$$

چون دو دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ به دو عدد نابرابر همگرایند، لذا $f(x)$ در صفر حد ندارد.

۱۳.

$$a_n = ۲ + \frac{۱}{n} \;,\; \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = ۱$$

$$b_n = ۲ + \frac{\sqrt{۲}}{n} \;,\; \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = ۵$$

چون دو دنباله ی $f(a_n)$ و $f(b_n)$ به دو عدد نابرابر همگرایند، لذا تابع $f(x)$ در ۲ حد ندارد.

۱۴.

۱۵. کافی است نشان دهیم حد چپ و راست هر دو برابر ۱ است.

می‌دانیم: $f(x)-۱<[f(x)]\le f(x)$

$$\frac{۱}{x}-۱<\left[\frac{۱}{x}\right]\le\frac{۱}{x}$$

اگر $x\to ۰^+$

$$\begin{cases} ۱-x<x\left[\dfrac{۱}{x}\right]\le ۱ \\ \lim\limits_{x\to ۰^+} ۱-x=\lim\limits_{x\to ۰^+} ۱=۱ \end{cases}\xrightarrow{\text{قضیه فشردگی}}\lim_{x\to ۰^+} x[\frac{۱}{x}]=۱$$

اگر $x\to ۰^-$

$$\begin{cases} ۱\le x\left[\dfrac{۱}{x}\right]<۱-x \\ \lim\limits_{x\to ۰^-} ۱=\lim\limits_{x\to ۰^-} ۱-x=۱ \end{cases}\xrightarrow{\text{قضیه فشردگی}}\lim_{x\to ۰^-} x[\frac{۱}{x}]=۱$$

۱۶.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^۲+x+۱)-(x^۲-x+۱)}{\sqrt{x^۲+x+۱}+\sqrt{x^۲-x+۱}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x}{\sqrt{x^۲+x+۱}+\sqrt{x^۲-x+۱}}\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x}{-۲x}=-۱$$

۱۷.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{(\sqrt[۳]{x})^۳-(۱)^۳}{(x^۲-۳x+۲)(\sqrt[۳]{x^۲}+۱+\sqrt[۳]{x})}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)}{(x-۱)(x-۲)(\sqrt[۳]{x^۲}+۱+\sqrt[۳]{x})}=\frac{-۱}{۳}$$

۱۸.

$$\lim_{x\to ۳^+}(۲[x]+۳a)=۶+۳a\ ,\quad \lim_{x\to ۳^-}\left(\frac{-(x-۳)}{(x-۳)(x+۳)}+b\right)=-\frac{۱}{۶}+b$$

$$f(۳)=۱\Rightarrow ۶+۳a=۱\Rightarrow a=-\frac{۵}{۳}\ ,\quad -\frac{۱}{۶}+b=۱\Rightarrow b=\frac{۷}{۶}$$

۱۹.

$$f(۱)=-m\quad ,\quad f(-۱)=-۵m+۲$$

$$f(۱)f(-۱)<۰\Rightarrow ۵m^۲-۲m<۰\Rightarrow m=۰,\frac{۲}{۵}$$

$$m\in(۰,\frac{۵}{۲})$$

m	$-\infty$		۰		$\frac{۲}{۵}$		$+\infty$
$۵m^۲-۲m$		+	۰	-	۰	+	
				ج			

۲۰.

$$\frac{x+۱}{x-۱}\ge ۰\Rightarrow Df=(-\infty,-۱]\cup(۱,+\infty)$$

$\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=+\infty\Rightarrow$ خط $x=۱$ مجانب قائم تابع است.

$$f(x)=x\sqrt{\frac{x+۱}{x-۱}}\to m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{x+۱}{x-۱}}=۱$$

$$h = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)}{\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2x}{x-1}}{\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1\right)} = 1$$

خط $y = x + 1$ مجانب مایل تابع است.

راه حل سریعتر:

$$f(x) = mx\cdot\sqrt[n]{\frac{x+a}{x+b}} \xrightarrow{\text{خط مجانب مایل}} y = mx + \frac{a-b}{n}\times m$$

$$f(x) = x\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \xrightarrow{\text{خط مجانب مایل}} y = x + \frac{1-(-1)}{2}\times 1 = x+1$$

.۲۱

$$f(x) = \frac{x^2-3x+3}{x-2}$$

$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y\to\infty \Rightarrow x=2$ مجانب قائم

چون درجه‌ی صورت از مخرج بیشتر است پس تابع $f(x)$ مجانب افقی ندارد.

ولی می‌تواند مجانب مایل داشته باشد، حال با تقسیم صورت بر مخرج مجانب مایل را در صورت وجود پیدا می‌کنیم.

$$\begin{array}{l|l} x^2-3x+3 & x-2 \\ \cline{2-2} & x-1 \\ \underline{-x^2+2x} & \\ -x+3 & \\ \underline{\;\;x-2\;\;} & \\ \;\;1 & \end{array} \rightarrow y = x-1 \text{ مجانب مایل}$$

.۲۲

پیوسته است $x_0 = 1$ در $f \Rightarrow \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow b = a+1 \Rightarrow a-b=-1$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{b\sqrt[3]{x}-b}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{b(x-1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} =$$

$$f'_-(1) = \lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{a+x-b}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{(a-b)+x}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{x-1}{x-1}$$

$${}'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow \frac{b}{3} = 1 \Rightarrow b=3,\; a=2$$

.۲۳

می‌دانیم که: $D_{f'} = D_f - \{$نقاط مشتق ناپذیر$\}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}} & x \geq ۰ \\ \frac{-x}{\sqrt{x^۲+۱}} & x < ۰ \end{cases} \quad , \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{۱}{\sqrt{x^۲+۱}\times(x^۲+۱)} & x > ۰ \\ \frac{-۱}{\sqrt{x^۲+۱}\times(x^۲+۱)} & x < ۰ \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_{+}(۰) = ۱ \\ f'_{-}(۰) = -۱ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{در } x=۰ \text{ مشتق پذیر نیست}} D_{f'} = \mathbb{R} - \{۰\}$$