

نام درس: جبر و احتمال

نام دبیر: امراله

زمان: ۱۰۰ دقیقه

تاریخ: ۹۵/۱۰/۸

تعداد صفحات: ۲

پایه سوم



آزمون پایانی نوبت اول
سال تحصیلی ۹۶-۹۵

نام و نام خانوادگی:

پایه سوم

بارم	سوالات	ردیف
۲	با استفاده از اصل استقرای ریاضی برای هر عدد طبیعی n ، ثابت کنید $1 - 4^{2n}$ بر ۵ بخشپذیر است.	۱
۱	با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید سه برابر مربع یک عدد فرد منهای ۳، مضرب ۱۲ است.	۲
۱	برای احکام نادرست زیر مثال نقض بزنید. الف) برای هر عدد طبیعی n ، آنگاه $2 + 3^n$ عددی اول است. ب) اگر a, b, c سه عدد گنگ باشند آنگاه $\frac{ab}{c}$ نیز عددی گنگ است.	۳
۱/۵	برای دو عدد حقیقی مثبت a, b با اثبات بازگشتی ثابت کنید: $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{4}{\sqrt{a+b}}$	۴
۲	اگر $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ اعدادی گنگ باشند، ثابت کنید $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{7}}$ نیز عددی گنگ است.	۵
۲	هفت نقطه درون یک شش ضلعی منتظم به ضلع واحد انتخاب می کنیم، ثابت کنید فاصله دست کم دو نقطه از آنها از ۱ کمتر است.	۶
۰/۷۵	جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید. الف) مجموعه $A = \{\{\}, \{\emptyset\}\}$ دارای زیر مجموعه است. ب) دو زوج مرتب $(y^2 - 1, (x + 2)^2)$ ، $(0, 3)$ با هم برابرند، مقدار y برابر با است. ج) دو مجموعه $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ و $B = \{-3, -2, 1, 2, 3\}$ را در نظر بگیرید مجموعه $A \times B$ دارای عضو است.	۷
۱/۵	مجموعه $A = \{x \in R x^2 + x = 0\}$ و $B = \{x \in N x^2 \leq 4\}$ و $C = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2)\}$ را در نظر بگیرید. مجموعه $A \times B - C$ را با اعضا مشخص کنید.	۸
۱/۵	مجموعه $A_n = (\frac{1}{n}, \frac{2n-1}{n})$ را برای $n \in N$ در نظر بگیرید مطلوب است محاسبه: الف) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_n$ ب) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n$	۹

۳	<p>با استفاده از قوانین جبر مجموعه ها ثابت کنید :</p> <p>الف) $A - (A \cap B) = A - B$</p> <p>ب) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$</p> <p>ج) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$</p>	۱۰
۰/۷۵	<p>مجموعه ای دارای ۳۱ زیر مجموعه محض است. مجموعه توانی آن دارای چند زیر مجموعه است ؟</p>	۱۱
۱/۵	<p>اگر $A = \{2^n n \in \mathbb{N}, n < 4\}$ و $B = \{2k + 1 k \in \mathbb{Z}, k \leq 1\}$ دو مجموعه باشند . $R = \{(x, y) \in A \times B x + y < 6\}$ را مشخص کنید.</p>	۱۲
۱/۵	<p>نمودار رابطه زیر را رسم کنید . $R = \{(x, y) x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x \}$</p>	۱۳

۱.

$$p(1) = 4^2 - 1 = 5q \rightarrow 15 = 5q$$

$$\text{فرض } p(k) = 4^{2k} - 1 = 5q$$

$$\text{حکم } p(k+1) = 4^{2k+2} - 1 = 5q'$$

طرفین فرض را در 4^2 ضرب میکنیم

$$4^2(4^{2k} - 1) = 4^2 \times 5q \rightarrow 4^{2k+2} - 16 = 5 \times 16q$$

$$\rightarrow 4^{2k+2} - 1 = 5 \times 16q + 15 = 5(16q + 3)$$

$$\rightarrow 4^{2k+2} - 1 = 5q'$$

۲.

$$\begin{aligned} 3(2k+1)^2 - 3 &\rightarrow 3(4k^2 + 4k + 1) - 3 \rightarrow 12k^2 + 12k + 3 - 3 \rightarrow 12k^2 + 12k \\ &\rightarrow 12(k^2 + k) \rightarrow 12q \end{aligned}$$

۳.

$$n = 5 \rightarrow 3^5 + 2 = 245 = 5q$$

الف) عددی اول نیست

$$a = \sqrt{2}, b = \sqrt{3}, c = \sqrt{6} \rightarrow \frac{ab}{c} = 1$$

ب) گنگ نیست

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{ab}} \geq \frac{2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \rightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq 4\sqrt{ab}$$

۴.

$$\rightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$$

$$\rightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

بدیهی است و تمام مراحل برگشت پذیر است.

۵. برهان خلف

$$\text{فرض خلف } \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{7}} \in Q \rightarrow \frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{-2} = a \rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{7} = -2a$$

$$\rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{7} - 2a \xrightarrow{\text{توان } 2} 3 = 7 - 4a\sqrt{7} + 4a^2$$

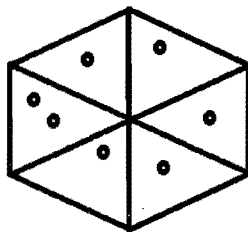
$$\rightarrow 4a\sqrt{7} = 4 + 4a^2 \rightarrow \sqrt{7} = \frac{1 + a^2}{a} \rightarrow \sqrt{7} \in Q$$

در تناقض با فرض است. بنابراین فرض خلف باطل است پس حکم برقرار است.

۶

ابتدا شش ضلعی را مطابق شکل به ۶ مثلث متساوی الاضلاع به ضلع یک تقسیم میکنیم.

هفت نقطه را کیوتر و شش مثلث را لانه در نظر می گیریم ، طبق اصل لانه کیوتر در یک لانه بیش از یک کیوتر قرار می گیرد. از طرفی بیشترین فاصله در یک مثلث متساوی الاضلاع طول ضلع آن یعنی یک است پس فاصله حداقل ۲ نقطه کمتر از یک است .



۷

الف) $n(A) = 2 \rightarrow \text{تعداد زیر مجموعه ها} = 2^2 = 4$

ب) $y^2 - 1 = 3 \rightarrow y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2$

ج) $n(A) = 4, n(B) = 5 \rightarrow n(A \times B) = 20$

۸

$$A = \{-1, 0\} \quad B = \{1, 2\} \quad A \times B = \{(-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2)\}$$

$$A \times B - C = \{(-1, 1), (-1, 2)\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = (1, 1) \\ A_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \\ A_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right) \\ A_4 = \left(\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right) \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{الف) } \bigcap_{i=1}^n A_i = \emptyset \\ \text{ب) } \bigcup_{i=1}^n A_i = \left(\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right) \end{array} \right.$$

الف) $A \cap (A \cap B)^c = A \cap (A^c \cup B^c) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) = \emptyset \cup (A \cap B^c) = A - B$

ب) $A \cap (B \cup C)^c = A \cap (B^c \cap C^c) = (A \cap B^c) \cap C^c$
 $= (A - B) \cap C^c$
 $= (A - B) - C$

ج) $(A - B) \cup (B - A)$

$$\begin{aligned} (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) &= [(A \cap B^c) \cup B] \cap [(A \cap B^c) \cup A^c] \\ &= [(A \cup B) \cap (B^c \cup B)] \cap [(A \cup A^c) \cap (B^c \cup A^c)] \\ &= (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \end{aligned}$$

$2^n - 1 = 31 \rightarrow n = 5 \rightarrow$ تعداد اعضای مجموعه توانی = $2^5 = 32$ = تعداد زیر مجموعه

تعداد زیر مجموعه های مجموعه توانی = $2^{2^5} = 32$

.۱۲

$$A = \{۲, ۴, ۸\} \quad , \quad B = \{-۱, ۱, ۳\}$$

$$R = \{(۲, -۱), (۲, ۱), (۲, ۳), (۴, -۱), (۴, ۱)\}$$

.۱۳

$$x^r + y^r = ۱$$

$$y = |x|$$

