تاریخ :	وقت : دقیقه
نام و نام خانوادگی :	تعداد سوالات: ۴۵
موضوع ۱.ریاضیات گسسته و جبر و احتمال	علیرضا عیسائی تفرشی

سریال ۴۵۴۲۷۳

۱.گزینه ۳ هر پیشامد زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای است. می‌دانیم در آزمایش پرتاب ۳ سکه فضای نمونه‌ای به صورت زیر است:

$S = \{$ (ر،ر،ر) , (پ،ر،ر) , ... , (پ،پ،پ)$\} \Rightarrow |S| = ۲^۳ = ۸$

پیشامد هر سه سکه یکسان آمده باشند به صورت زیر است: $A = \{$(پ، پ،پ) و (ر، ر، ر)$\}$

اگر بخواهیم پیشامدی مانند B با پیشامد A ناسازگار باشد باید $A \cap B = \phi$ ، به عبارت دیگر B هیچ‌کدام از دو زوج مرتب (پ، پ، پ) و (ر، ر، ر) را نداشته باشد.

می‌دانیم S هشت عضوی است، دو عضو پیشامد A را که از آن کنار بگذاریم، هر کدام از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی حاصل $(S-A)$ یک جواب مورد نظر برای ماست.

$$۲^{|S-A|} = ۲^۶ = ۶۴$$

۲.گزینه ۳ چون از نتیجه‌ی خروج کارت‌های اول و دوم اطلاعی در دست نیست، برداشتن این کارت‌ها تأثیری در فضای نمونه‌ای و فضای مطلوب ندارد. لذا دو کارت بعدی، هر کدام از ۹ کارت اولی می‌توانند باشند که می‌خواهیم هر دو زوج باشند، یعنی درست مانند آن‌که بخواهیم کارت اول و دوم را خارج کنیم:

$$P = \frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۹}{۲}} = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

نکته: اگر اطلاعی در مورد آزمایش‌های رخ داده، داده نشده باشد، درست مانند آن است که اتفاقی رخ نداده باشد. این موضوع (بی‌تأثیری آزمایش‌هایی که از نتیجه‌ی آن‌ها بی‌خبریم) را می‌توان با فرمول احتمال کل ثابت کرد.

۳.گزینه ۳ چون احتمال شرطی است، ابتدا فضای نمونه‌ی تقلیل یافته (مجموع دو تاس مضرب ۴) را می‌نویسیم:

$$\text{حالت‌های مجموع مضرب ۴} \begin{cases} \text{مجموع ۴} & :(۱\,,۳)(۲\,,۲)(۳\,,۱) \\ \text{مجموع ۸} & :(۲\,,۶)(۳\,,۵)(۴\,,۴)(۵\,,۳)(۶\,,۲) \rightarrow n(S)=۹ \\ \text{مجموع ۱۲} & :(۶\,,۶) \end{cases}$$

اگر بخواهیم هر دو عدد فرد باشند، تنها حالت‌های (۳ , ۵)، (۵ , ۳)، (۱ , ۳) و (۳ , ۱) قابل قبول است یعنی $n(A) = ۴$ است.

پس $P(A) = \frac{۴}{۹}$ است.

۴.گزینه ۲

اگر A و B دو پیشامد مستقل از یک فضای نمونه‌ای باشند آنگاه : $P(A|B) = P(B) \;,\; P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$

$$P(A|B) = \frac{۱}{۴} \xrightarrow{B,A\ \text{مستقل}} P(A) = \frac{۱}{۴} \;,\; P(B) = ۲P(A) \Rightarrow P(B) = \frac{۱}{۲}$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - \overbrace{P(A\cap B)}^{P(A)\times P(B)} = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲} - \left(\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۵}{۸}$$

۵.گزینه ۲

$$P(A|A\Delta B) = \frac{P(A\cap(A\Delta B))}{P(A\Delta B)} = \frac{P(A-B)}{P(A\Delta B)} = \frac{P(A-B)}{\underbrace{P(B-A)}_{۰/۳}+P(A-B)} = ۰/۲۵ \Rightarrow \frac{x}{x+۰/۳} = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow ۴x = x + ۰/۳ \Rightarrow x = P(A-B) = ۰/۱$$

نکته: $P(A\Delta B) = P(A-B) + P(B-A) = P(A) + P(B) - ۲P(A\cap B)$

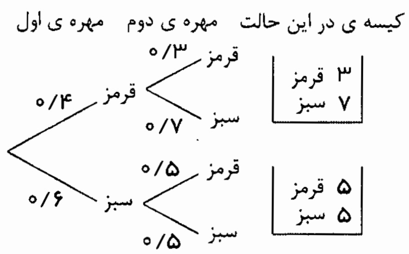
۶.گزینه ۲ وقتی A و B دو پیشامد مستقل باشند، داریم $P(A|B) = P(A)$ لذا $P(A) = \frac{۱}{۴}$

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{8}\xrightarrow{P(A)=\frac{1}{4}}P(A\cap B)=\frac{1}{8}\Rightarrow P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{8}\Rightarrow P(B)=\frac{1}{2}$$

پیشامد آن‌که یا فقط A یا فقط B رخ دهد، یعنی پیشامد $A\Delta B$

$$P(A\Delta B)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

۷.گزینه ۴



$$\Rightarrow \text{احتمال سبز بودن مهره‌ی دوم}=(0/4\times 0/7)+(0/6\times 0/5)=\frac{28+30}{100}=\frac{58}{100}=\frac{29}{50}$$

راه حل دیگر: اگر A پیشامد سبز بودن مهره‌ی دوم و B_1 پیشامد قرمز بودن مهره‌ی اول و B_2 پیشامد سبز بودن مهره‌ی اول باشد، آن‌گاه با جایگذاری در فرمول احتمال داریم:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(A|B_1)+P(B_2)\cdot P(A|B_2)=(0/4\times 0/7)+(0/6\times 0/5)=\frac{29}{50}$$

۸.گزینه ۴ اگر A پیشامد معیوب بودن و B_i پیشامد تولید کالا توسط کارخانه‌ی i ام باشد، داریم:

$$\underbrace{P(A)}_{\text{معیوب بودن}}=\underbrace{P(A|B_1)}_{\text{کارخانه ی ۱}}\times P(B_1)+\underbrace{P(A|B_2)}_{\text{کارخانه ی ۲}}\times P(B_2)$$

$$=\frac{1}{100}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{100}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{300}=\frac{1}{75}$$

البته فرمول احتمال کل را می‌توان به‌صورت نمودار درختی نیز نمایش داد:

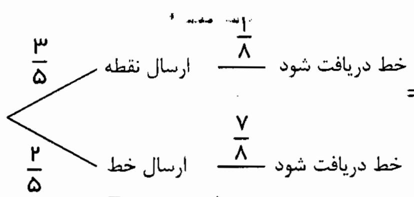
$\frac{2}{3}\nearrow$ **کارخانه‌ی ۱** $\xrightarrow{\frac{1}{100}}$ **معیوب بودن**

$\frac{1}{3}\searrow$ **کارخانه‌ی ۲** $\xrightarrow{\frac{2}{100}}$ **معیوب بودن**

$$\Rightarrow P(\text{معیوب})=\frac{2}{3}\times\frac{1}{100}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{100}=\frac{4}{300}=\frac{1}{75}$$

(شاخه‌ها را در هم ضرب و حاصل را با هم جمع می‌کنیم.)

۹.گزینه ۲ فرمول احتمال کل یا نمودار درختی:



$$\Rightarrow P\ (\text{دریافت خط})=\frac{3}{5}\times\frac{1}{8}+\frac{2}{5}\times\frac{7}{8}=\frac{17}{40}$$

نکته: اگر عمل B بعد از عمل A رخ دهد و نتیجه‌ی A برای B فاقد اهمیت باشد، در همه‌ی حالت‌های رخداد A، رخداد B را بررسی می‌کنیم:

$$P(B)=(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\cdots+P(A_n)P(B|A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

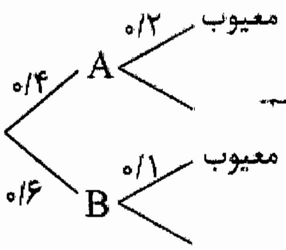
۱۰.گزینه ۲

معیوب بودن کالا: M **پیشامد انتخاب کالا از** $A : A$ **پیشامد انتخاب کالا از** $B : B$

$$\text{پ}: P(A|M) = \frac{P(A\cap M)}{P(M)} = \frac{P(A)\cdot P(M|A)}{P(A)\cdot P(M|A) + P(B)\cdot P(M|B)}$$

$$= \frac{۰٫۴ \times ۰٫۲}{(۰٫۴\times ۰٫۲)+(۰٫۶\times ۰٫۱)} = \frac{۰٫۰۸}{۰٫۰۸+۰٫۰۶} = \frac{۸}{۱۴} = \frac{۴}{۷}$$

این مطلب را می‌توان روی نمودار درختی نیز نمایش داد:



$$\Rightarrow \text{احتمال مورد نظر} = \frac{۰٫۴\times ۰٫۲}{(۰٫۴\times ۰٫۲)+(۰٫۶\times ۰٫۱)} = \frac{۴}{۷}$$

۱۱.گزینه ۲ راه حل اول: چون از نتیجه‌ی آزمایش دوم مطلع هستیم و در مورد آزمایش اول به دنبال حالت مطلوبی می‌گردیم. احتمال شرطی است (قاعده‌ی بیز). اگر R **پیشامد قرمز بودن باشد، داریم:**

$$P(A|R) = \frac{P(A\cap R)}{P(R)} = \frac{P(A)\cdot P(R|A)}{P(A)\cdot P(R|A)+P(B)\cdot P(R|B)+P(C)\cdot P(R|C)}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۵}}{\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۵}+\frac{۱}{۳}\times ۱+\frac{۱}{۳}\times ۰} = \frac{۳}{۸}$$

راه حل دوم: نمایش نمودار درختی:

$$\begin{cases} \xrightarrow{A} \frac{۱}{۳} \xrightarrow{\text{قرمز}} \frac{۳}{۵} \\ \xrightarrow{B} \frac{۱}{۳} \xrightarrow{\text{قرمز}} \frac{۵}{۵} \\ \xrightarrow{C} \frac{۱}{۳} \xrightarrow{\text{قرمز}} \frac{۰}{۵} \end{cases}$$

$$P(A|R) = \frac{P(A\cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۵}}{\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۵}+\frac{۱}{۳}\times ۱+\frac{۱}{۳}\times ۰} = \frac{۳}{۸}$$

در این راه همه‌ی حالات منجر به خروج مهره‌ی قرمز را نوشته، شاخه‌ای که مطلوب است، بر کل تقسیم می‌کنیم.

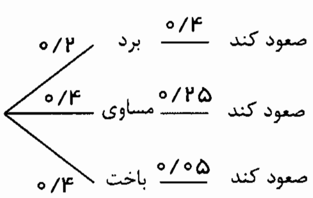
۱۲.گزینه ۲

$$P(\text{صعود}) = P(\text{برد})\, P(\text{صعود} | \text{برد}) + P(\text{مساوی})\, P(\text{صعود} | \text{مساوی}) + P(\text{باخت})\, P(\text{صعود} | \text{باخت})$$

$$= \frac{۲۰}{۱۰۰}\times\frac{۴}{۱۰}+\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۲۵}{۱۰۰}+\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۵}{۱۰۰} = \frac{۸}{۱۰۰}+\frac{۱۰}{۱۰۰}+\frac{۲}{۱۰۰} = \frac{۲}{۱۰}$$

$$P(\text{برد} | \text{صعود})\ \frac{P(\text{صعود} \cap \text{برد})}{P(\text{صعود})} = \frac{\frac{۲۰}{۱۰۰}\times\frac{۴}{۱۰}}{\frac{۲}{۱۰}} = \frac{۴}{۱۰}$$

راه حل دوم: فرمول احتمال کل را با نمودار درختی هم می‌توان نمایش داد:



$$P\ (\text{برد} \mid \text{صعود})\ \frac{P(\text{برد} \cap \text{صعود})}{P(\text{صعود})} = \frac{۰/۲ \times ۰/۴}{۰/۲ \times ۰/۴ + ۰/۴ \times ۰/۲۵ + ۰/۴ \times ۰/۰۵} = \frac{۸}{۸+۱۰+۲} = \frac{۸}{۲۰} = ۰/۴$$

دقت کنید برای استفاده از قاعده‌ی بیز لازم نیست اسیر فرمول شوید. در واقع مسئله یک احتمال شرطی است که احتمال وقوع پیشامد اول به شرط وقوع پیشامد دوم را مورد بررسی قرار می‌دهد. دقت کنید که مخرج کسر یعنی احتمال وقوع پیشامد دوم را باید از فرمول احتمال کل به‌دست آورید.

۱۳.گزینه ۳

$$P(X \le ۲) = P(X=۱) + P(X=۲) = \frac{۳}{۶} \times \frac{۳}{۶} + (۱ - \frac{۱}{۴}) \times \frac{۱}{۴} = \frac{۷}{۱۶}$$

۱۴.گزینه ۴

در تابع توزیع احتمال یا تابع جرم احتمال جمع همه‌ی احتمال‌ها باید برابر یک باشد:

$$۶a + ۴a + \frac{۱}{۱۲} + a = ۱ \Rightarrow a = \frac{۱}{۱۲}$$

$$P(X \ge ۲) = ۱ - P(X=۱) = ۱ - \frac{۶}{۱۲} = \frac{۱}{۲}$$

نکته:

$$P(\bar{A}) = ۱ - P(A)$$

۱۵.گزینه ۳ **اگر $P(X=i)$ برای $i = ۱, \cdots, n$ تابع احتمال باشد، آن‌گاه $\sum_{i=۱}^{n} P(X=i) = ۱$ است.**

$$\frac{۱^۳+۱}{a} + \frac{۲^۳+۱}{a} + \cdots + \frac{۹^۳+۱}{a} = ۱ \Rightarrow \frac{۱^۳+۲^۳+\cdots+۹^۳+۹}{a} = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{(\frac{۹\times۱۰}{۲})^۲ + ۹}{a} = ۱ \Rightarrow ۴۵^۲ + ۹ = a \Rightarrow a = ۲۰۳۴$$

لذا داریم:

$$P(X=۲) = \frac{۲^۳+۱}{۲۰۳۴} = \frac{۹}{۲۰۳۴} = \frac{۱}{۲۲۶}$$

نکته:

$$\sum_{i=۱}^{n} i^۳ = ۱^۳ + ۲^۳ + \cdots + n^۳ = (\frac{n(n+۱)}{۲})^۲$$

۱۶.گزینه ۱ **مجموعه‌ی A دارای ۱۶ زیر مجموعه است. ۲ تا از این زیرمجموعه‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم. پس تعداد اعضای نمونه برابر است با:**

$$n(s) = \binom{۱۶}{۲} = ۱۲۰$$

حالا می‌خواهیم اجتماع دو زیر مجموعه دارای ۱ عضو باشد. دو زیرمجموعه‌ی مطلوب عبارت است از یک زیر مجموعه‌ی ۱ عضوی و $\varnothing$ حالات انتخاب یک زیر مجموعه‌ی ۱ عضوی برابر است با:

$$n(A) = \binom{۴}{۱} = ۴ \Rightarrow P(x=۱) = \frac{۴}{۱۲۰} = \frac{۱}{۳۰}$$

۱۷.گزینه ۱ **اگر بخواهیم سومین لامپ معیوب در پنجمین آزمایش مشخص شود، باید در ۴ آزمایش قبلی ۲ لامپ معیوب پیدا شده باشد:**

$$\binom{۴}{۲} (\frac{۳}{۹})^۲ \times (\frac{۶}{۹})^۲ \times (\frac{۳}{۹}) = ۶ \times \frac{۱}{۹} \times \frac{۴}{۹} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۸}{۸۱}$$

۱۸.گزینه ۴

نکته: (احتمال شرطی): $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$$P(\{a,b,c,d\}) = \frac{۲}{۳} \Rightarrow P(a)+P(b)+P(c)+P(d) = \frac{۲}{۳} \quad (*)$$

چون $P(a)+P(b)+P(c)+P(d)+P(e) = ۱$**، پس از $(*)$ نتیجه می‌گیریم:** $P(e) = ۱ - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}$

$$P(\{a,e\})=\frac{۱}{۲}\Rightarrow P(a)+P(e)=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{P(e)=\frac{۱}{۳}}P(a)=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۶}$$

حال با استفاده از نکته داریم:

$$P(\{a,b,c,d\})\,|\{b,c,d,e\})=\frac{P(\{b,c,d\})}{P(\{b,c,d,e\})}=\frac{۱-\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۶}}=\frac{۳}{۵}$$

۱۹.گزینه ۲ نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آن‌گاه $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

نکته: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)\Rightarrow ۰/۴=۰/۲+P(B)-۰/۲P(B)$$
$$\Rightarrow ۰/۸P(B)=۰/۲\Rightarrow P(B)=۰/۲۵$$

۲۰.گزینه ۲ A: به‌موقع تحویل شود.

B: به‌موقع آماده‌ی ارسال شود.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۰/۷}{۰/۸}=\frac{۷}{۸}$$

۲۱.گزینه ۲ نکته: احتمال رخداد پیشامد A به شرط این‌که پیشامد B رخ دهد، برابر است با: $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$S=\{$ (ش،ش), (خ،ش), (ش،خ), (خ،خ) $\}$

$B=\{$ (ش،ش), (خ،ش), (ش،خ) $\}$

$A=\{$ (ش،ش) $\}$

بنابراین: $P(A|B)=\dfrac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۳}{۴}}=\dfrac{۱}{۳}$

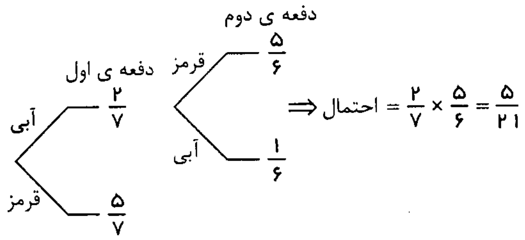
۲۲.گزینه ۲

راه‌حل اول: نکته (قاعده ضرب احتمال): $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)$

A: مهره اول آبی   B: مهره دوم قرمز

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)=\frac{۲}{۷}\times\frac{۵}{۷-۱}=\frac{۵}{۲۱}$$

راه‌حل دوم: با استفاده از نمودار درختی داریم:



۲۳.گزینه ۳ نکته: در پرتاب دو تاس، اگر متغیر تصادفی X قدرمطلق تفاضل اعداد ظاهر شده باشد، واضح است مقدار x یکی از اعداد ۰ تا ۵ می‌باشد و تابع جرم احتمال به‌صورت زیر خواهد بود:

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$P(X=x)$	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۱۰}{۳۶}$	$\frac{۸}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$

با توجه به نکته‌ی بالا داریم:

$$P(X > ۳) = P(X \geq ۴) = P(X = ۴) + P(X = ۵) = \frac{۴}{۳۶} + \frac{۲}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

۲۴.گزینه ۲ چون صحبتی از رنگ مهره‌های اول و سوم نشده است، می‌توانیم فرض کنیم آن‌ها را خارج نکرده‌ایم. پس کافی است احتمال این‌که مهره‌های اول و دوم سفید باشند را محاسبه کنیم که برابر است با:

$$\frac{۵}{۸} \times \frac{۴}{۷} = \frac{۵}{۱۴}$$

۲۵.گزینه ۴ نکات:

۱) (احتمال شرطی): $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

۲) $P(A') = ۱ - P(A)$

۳) $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$

۴) $p(A \cup B) = p(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(B'|A') = \frac{P(A' \cap B')}{P(A')} = \frac{P((A \cup B)')}{P(A')} = \frac{۱ - P(A \cup B)}{P(A')} = \frac{۱ - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))}{P(A')} \qquad (*)$$

طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} P(A') = ۱ - P(A) = ۱ - ۰/۶ = ۰/۴ \\ P(B - A) = ۰/۳ \Rightarrow P(B) - P(A \cap B) = ۰/۳ \end{cases}$$

با جایگذاری این مقادیر در (*) داریم: $P(B'|A') = \frac{۱ - (۰/۶ + ۰/۳)}{۰/۴} = \frac{۰/۱}{۰/۴} = \frac{۱}{۴}$

۲۶.گزینه ۲ نکته: اگر فضای نمونه‌ای S به پیشامدهای $B_۱$، $B_۲$، ...، و B_n افراز شود ($P(B_i) \neq ۰$)، آنگاه داریم:

$$P(A) = \sum_{i=۱}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

A: عینکی بودن

$B_۱$: مرد بودن

$B_۲$: زن بودن

با استفاده از قاعده‌ی بیز، داریم:

$$P(B_۱|A) = \frac{P(A \cap B_۱)}{P(A)} = \frac{P(A|B_۱)P(B_۱)}{P(A|B_۱)P(B_۱) + P(A|B_۲)P(B_۲)}$$

$$= \frac{۰/۳ \times ۰/۲}{(۰/۳ \times ۰/۲) + (۰/۱ \times ۰/۸)} = \frac{۶}{۱۴} = \frac{۳}{۷}$$

۲۷.گزینه ۱ نکته: مجموع همه‌ی جمله‌های یک دنباله‌ی هندسی نامتناهی با جمله‌ی اول a و قدر نسبت q ($|q| < ۱$) برابر است با:

$$\frac{a}{۱ - q}$$

متغیر تصادفی X را تعداد دفعاتی تعریف می‌کنیم که لازم است علی تیراندازی کند تا برای اولین بار تیرش به هدف بخورد. در این صورت داریم:

$$P(X > ۵) = P(X \geq ۶) = P(X = ۶) + P(X = ۷) + P(X = ۸) + \cdots$$

$$= (۰/۱)^۵(۰/۹) + (۰/۱)^۶(۰/۹) + (۰/۱)^۷(۰/۹) + \cdots$$

$$= (۰/۱)^۵(۰/۹)(۱ + ۰/۱ + (۰/۱)^۲ + \cdots) = (۰/۱)^۵(۰/۹)\frac{۱}{۱ - ۰/۱} = (۰/۱)^۵$$

۲۸.گزینه ۳

نکته: (احتمال شرطی) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

نکته: $P(A\Delta B)=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)$

$$\begin{cases} P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{۲}{۳}\Rightarrow P(B)=\dfrac{۳}{۲}P(A\cap B) \\ P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{۳}{۴}\Rightarrow P(A)=\dfrac{۴}{۳}P(A\cap B) \end{cases}$$

$$P(A\Delta B)=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)=\frac{۴}{۳}P(A\cap B)+\frac{۳}{۲}P(A\cap B)-۲P(A\cap B)$$

$$=\frac{۵}{۶}P(A\cap B)\Rightarrow \frac{P(A\Delta B)}{P(A\cap B)}=\frac{۵}{۶}$$

۲۹.گزینه ۴ راه‌حل اول:

نکته (احتمال شرطی): $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

با استفاده از نکته‌ی بالا داریم:

$$P(\underset{\text{نفر سوم مرد باشد}}{A} \mid \overset{\text{دو نفر اول زن باشند}}{B})=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\dfrac{\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱}}{\binom{۹}{۳}}}{\dfrac{\binom{۵}{۲}\binom{۷}{۱}}{\binom{۹}{۳}}}=\frac{۴}{۷}$$

راه‌حل دوم: ۲ زن از بین ۵ زن انتخاب شده‌اند. پس درحال حاضر ۳ زن و ۴ مرد باقی‌مانده است، بنابراین احتمال مرد بودن نفر سوم برابر است با احتمال مرد بودن فرد انتخاب شده از مجموعه‌ی باقی‌مانده که برابر است با: $\dfrac{۴}{۷}=\dfrac{\binom{۴}{۱}}{\binom{۷}{۱}}$

۳۰.گزینه ۳ نکته: تابع $P(X=x_i)=p_i(۱\le i\le n)$ یک تابع جرم احتمال است، هرگاه:

الف) $(۱\le i\le n)$ $۰\le p_i\le ۱$ ب) $p_۱+p_۲+\cdots+p_n=۱$

نکته: $۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+n^۲=\dfrac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$

$$P(X=۱)+P(X=۲)+P(X=۳)+P(X=۴)+P(X=۵)=۱$$

$$\Rightarrow a(۱^۲+۲^۲+۳^۲+۴^۲+۵^۲)=۱\Rightarrow a(\frac{۵\times ۶\times ۱۱}{۶})=۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۵۵}$$

$$P(X\le ۴)=۱-P(X=۵)=۱-\frac{۱}{۵۵}(۲۵)=\frac{۳۰}{۵۵}=\frac{۶}{۱۱}$$

۳۱.گزینه ۲ نکته: مجموع احتمالات اعضای متغیر تصادفی x برابر ۱ می‌باشد.

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$P(X=x)$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۲}{۷}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{a}{۱۴}$	$\frac{a}{۱۴}$	$\frac{a}{۱۴}$

$$\sum_{i=۱}^{۶}P(X=i)=۱\Rightarrow \frac{۱}{۴}+\frac{۲}{۷}+\frac{۱}{۴}+\frac{۳a}{۱۴}=۱\Rightarrow \frac{۱۱}{۱۴}+\frac{۳a}{۱۴}=۱\Rightarrow a=۱$$

$$P(۲<X<۵)=P(X=۳)+P(X=۴)=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۴}=\frac{۷+۲}{۲۸}=\frac{۹}{۲۸}$$

۳۲.گزینه ۱ A: هر دو از کیسه‌ی اول B: هر دو قرمز

دسته ی اول $\xrightarrow{}$ $\frac{۱}{۲}$ $\xrightarrow{\text{هر دو قرمز}}$ $\dfrac{\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۱}{۲}} = \frac{۱۵}{۵۵} = \frac{۳}{۱۱}$

دسته ی دوم $\xrightarrow{}$ $\frac{۱}{۲}$ $\xrightarrow{\text{هر دو قرمز}}$ ۱

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۱۱}}{(\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۱۱})+(\frac{۱}{۲}\times ۱)} = \frac{\frac{۳}{۲۲}}{\frac{۱۴}{۲۲}} = \frac{۳}{۱۴}$$

۳۳.گزینه ۳ برای مهره‌ی خارج شده از کیسه‌ی اول، ۲ حالت امکان‌پذیر است. با استفاده از نمودار درختی داریم:

آبی $\frac{۴}{۹}$ $\xrightarrow{\text{مهره ی دوم آبی}}$ $\frac{۸}{۱۰}$ (کیسه ی دوم در این حالت شامل ۸ مهره ی آبی و ۲ مهره ی قرمز است)

قرمز $\frac{۵}{۹}$ $\xrightarrow{\text{مهره ی دوم آبی}}$ $\frac{۷}{۱۰}$ (کیسه ی دوم در این حالت شامل ۷ مهره ی آبی و ۳ مهره ی قرمز است)

بنابراین احتمال آبی بودن مهره‌ی دوم برابر است با:

$$(\frac{۴}{۹}\times\frac{۸}{۱۰})+(\frac{۵}{۹}\times\frac{۷}{۱۰}) = \frac{۳۲+۳۵}{۹۰} = \frac{۶۷}{۹۰}$$

۳۴.گزینه ۲

$$P(۳ < X \le ۶) = P(X=۴)+P(X=۵)+P(X=۶) = \underbrace{(\frac{۱}{۲})^۳(\frac{۱}{۲})}_{\text{سه بار اول خط، بار چهارم شیر}}$$

$$+ \underbrace{(\frac{۱}{۲})^۴(\frac{۱}{۲})}_{\text{چهاربار اول خط، بار پنجم شیر}} + (\frac{۱}{۲})^۵(\frac{۱}{۲})$$

$$= \frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۳۲}+\frac{۱}{۶۴} = \frac{۴+۲+۱}{۶۴} = \frac{۷}{۶۴}$$

۳۵.گزینه ۱ با استفاده از نمودار درختی داریم:

سبز $\frac{۷}{۱۰}$: سبز $\frac{۵}{۸}$ ، قرمز $\frac{۳}{۸}$

قرمز $\frac{۳}{۱۰}$: سبز $\frac{۵}{۸}$ ، قرمز $\frac{۳}{۸}$

$$\Rightarrow P = \frac{۷}{۱۰}\times\frac{۵}{۸}+\frac{۳}{۱۰}\times\frac{۷}{۸} = \frac{۳۵+۲۱}{۸۰} = \frac{۵۶}{۸۰} = \frac{۷}{۱۰}$$

۳۶.گزینه ۲

نکته: $۱^۲+۲^۲+\cdots+n^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$

تذکر: شرط آنکه تابع $P(X=x)$ یک تابع احتمال باشد آن است که $\sum_{x=m}^{n} P(X=x)$ برابر ۱ باشد.

$x=m,\cdots,n$

$$\sum_{x=۱}^{۱۰} P(X=x)=۱ \Rightarrow P(X=۱)+P(X=۲)+\cdots+P(X=۱۰)=۱ \Rightarrow \frac{۱^۲+۲^۲+\cdots+۱۰^۲}{a}=۱$$

$$\Rightarrow a=۱^۲+۲^۲+\cdots+۱۰^۲=\frac{۱۰\times ۱۱\times ۲۱}{۶}=۳۸۵$$

$$\Rightarrow P(X=x)=\frac{x^۲}{۳۸۵}\ ;\quad x=۱,۲,\cdots,۱۰$$

$$P(X<۶)=P(X\leq ۵)=P(X=۱)+P(X=۲)+\cdots+P(X=۵)$$

$$=\frac{۱^۲+۲^۲+\cdots+۵^۲}{۳۸۵}=\frac{\frac{۵\times ۶\times ۱۱}{۶}}{۳۸۵}=\frac{۵۵}{۳۸۵}=\frac{۱}{۷}$$

۳۷.گزینه ۲

یک سالم و یک معیوب

$$\underbrace{\binom{۲}{۱}}^{\text{جایگاه لامپ معیوب اول}}\times \underbrace{\frac{۲}{۱۰}}_{\text{معیوب اول}}\times \underbrace{\frac{۸}{۹}}_{\text{سالم اول}}\times \overbrace{\frac{۱}{۸}}^{\text{معیوب دوم}}=\frac{۴}{۹۰}=\frac{۲}{۴۵}$$

۳۸.گزینه ۴

نکته: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)$

با توجه به رنگ مهره‌ها، احتمال مورد نظر، احتمال انتخاب کیسه‌ی اول و خارج کردن ۲ مهره‌ی قرمز از آن است.

$$P(\overset{\text{کیسه اول}}{A}\cap \underset{\text{دو مهره قرمز}}{B})=P(A)P(B|A)=\frac{۱}{۲}\times\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۸}{۲}}=\frac{۳}{۲۸}$$

۳۹.گزینه ۱ A : علی دو مداد قرمز دریافت کند. B : دو مداد قرمز به رضا برسد.

$$n(A)=\underset{\text{۲قرمز علی}}{\binom{۴}{۲}}\ \overset{\text{اسیاه علی}}{\binom{۵}{۱}}\ \underbrace{\binom{۶}{۳}\binom{۳}{۳}}_{\text{رضا و محمد}}$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

$$=\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}}{\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}\binom{۶}{۳}}=\frac{\binom{۴}{۱}}{\binom{۶}{۳}}=\frac{۴}{۲۰}=\frac{۱}{۵}$$

۴۰.گزینه ۴ روش اول:

A: حداقل یکی از تاس‌ها ۶ بیاید.

B: حاصل‌ضرب اعداد ظاهر شده مضرب ۳ باشد.

$$P(B)=۱-P(B')=۱-\frac{۴\times ۴}{۶\times ۶}=\frac{۲۰}{۳۶}$$

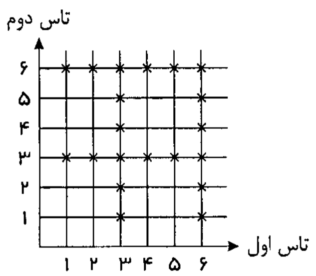
هیچ‌کدام از اعداد ظاهر شده مضرب ۳ نباشد (هر تاس ۴ حالت دارد)

$$P(A\cap B) \overset{A\subseteq B}{=\!=\!=} P(A)=\frac{۱۱}{۳۶} \qquad A=\{(۱,۶),(۲,۶),\cdots,(۶,۶),(۶,۱),\cdots,(۶,۵)\}$$

حال با استفاده از احتمال شرطی داریم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۱۱}{۳۶}}{\frac{۲۰}{۳۶}}=\frac{۱۱}{۲۰}$$

روش دوم: فضای نمونه‌ای این آزمایش حالاتی است که حاصل‌ضرب اعداد دو تاس مضرب ۳ باشد که در شکل زیر ضربدر زده شده است.



$$\Rightarrow n(S)=۲۰ \Rightarrow P(\text{حداقل یکی از تاس‌ها ۶ آمده باشد})=\frac{۱۱}{۲۰}$$

۴۱.گزینه ۱ نکته: تعداد اعداد بخش‌پذیر بر k در مجموعه‌ی $\{m+۱\ ,\ m+۲,\cdots,n\}$ **برابر است با:** $\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{m}{k}\right]$

نکته: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

A: **پیشامد مضرب ۷ بودن** $\qquad B$: **پیشامد مضرب ۳ بودن** $\qquad S=\{۱۰۱,۱۰۲,\cdots,۴۰۰\}$

$$P(\underbrace{A'}_{\text{مضرب ۷ نباشد}}\ |\ \overbrace{B'}^{\text{مضرب ۳ نباشد}})=\frac{P(A'\cap B')}{P(B')}=\frac{n(A'\cap B')}{n(B')}\quad (*)$$

$$n(B')=n(S)-n(B)=۳۰۰-([\frac{۴۰۰}{۳}]-[\frac{۱۰۰}{۳}])=۲۰۰$$

$$n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(S)-n(A\cup B)=۳۰۰-(n(A)+n(B)+n(B)-n(A\cap B))$$

$$=۳۰۰-([\frac{۴۰۰}{۳}]-[\frac{۱۰۰}{۳}]+[\frac{۴۰۰}{۷}]-[\frac{۱۰۰}{۷}]-[\frac{۴۰۰}{۲۱}]+[\frac{۱۰۰}{۲۱}])$$

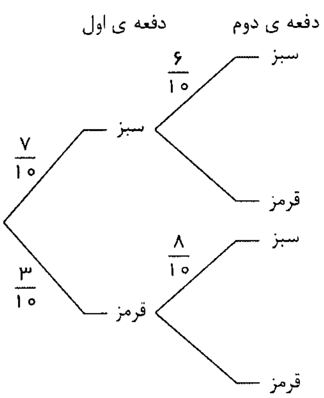
$$=۳۰۰-(۱۳۳-۳۳+۵۷-۱۴-۱۹+۴)=۳۰۰-۱۲۸=۱۷۲$$

با جایگذاری این مقادیر در $(*)$ داریم:

$$P(A'|B')=\frac{۱۷۲}{۲۰۰}=\%۸۶$$

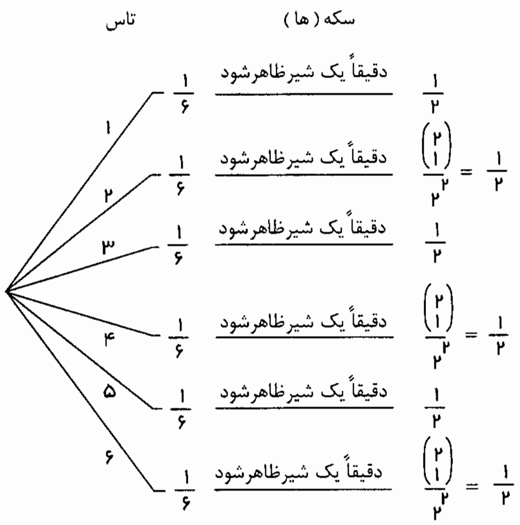
۴۲.گزینه ۳

با استفاده از نمودار درختی داریم:



$$\Rightarrow P=\frac{۷}{۱۰}\times\frac{۶}{۱۰}+\frac{۳}{۱۰}\times\frac{۸}{۱۰}=\frac{۴۲+۲۴}{۱۰۰}=\frac{۶۶}{۱۰۰}=۰/۶۶$$

۴۳.گزینه ۱ A: تاس عدد ۵ بیاید.
B: دقیقاً یک شیر ظاهر شود.
با استفاده از نمودار درختی داریم:



$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}}{\underbrace{\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}}_{\text{۶تا}}}=\frac{1}{6}$$

۴۴.گزینه ۳ نکته: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$.
تعداد اعضای فضای نمونه‌ای، برابر تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=12$ می‌باشد که برابر است با:

$$n(S)=\binom{12+3}{3}=\frac{15\times 14\times 13\times 12!}{3!12!}=35\times 13$$

تعداد اعضای پیشامد مورد نظر، برابر تعداد جواب‌های زوج و طبیعی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=12$ است که برای محاسبه‌ی آن به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$x_i=2k_i,\ k_i\geq 1\Rightarrow 2k_1+2k_2+2k_3+2k_4=12\Rightarrow k_1+k_2+k_3+k_4=6$$

$$\xrightarrow{k'_i=k_j-1\geq 0} k'_1+k'_2+k'_3+k'_4=2\Rightarrow \text{تعداد جواب ها}\quad n(A)=\binom{2+3}{3}=10$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{10}{35\times 13}=\frac{2}{91}$$

۴۵.گزینه ۱ نکته: شرط آنکه تابع $P(X=x);x=m,\cdots,n$ یک تابع احتمال باشد آن است که $\sum_{x=m}^{n}P(X=x)=1$ **باشد.**

نکته: $1^3+2^3+\cdots+n^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2$

$$P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=10)=1\Rightarrow a(1^3+2^3+\cdots+10^3)=1$$

$$\Rightarrow a(\frac{10\times 11}{2})^2=1\Rightarrow a=(\frac{1}{55})^2$$

$$P(X>۵)=۱-P(X\le ۵)=۱-(P(X=۱)+\cdots+P(X=۵))=۱-a(۱^۳+۲^۳+\cdots+۵^۳)$$

$$=۱-\frac{۱}{(۵۵)^۲}(\frac{۵\times ۶}{۲})^۲=۱-(\frac{۱۵}{۵۵})^۲=۱-(\frac{۳}{۱۱})^۲=۱-\frac{۹}{۱۲۱}=\frac{۱۱۲}{۱۲۱}$$