۱

$3\alpha^2+\alpha-2=0 \to 3\alpha^2=2-\alpha \Rightarrow \frac{3\alpha^2}{\alpha-2}-(3\alpha^2+\alpha)^2=\frac{2-\alpha}{\alpha-2}-(2)^2=-1-4=-5$

$3\alpha^2+\alpha=2$

پاسخنامه تشریحی [illegible]

گزینه ۴

۲

$[x^2]+[4x]=x+4 \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x^2+4x=x+4 \to x^2+3x-4=0 \to (x+4)(x-1)=0 \to \begin{cases} x=1 \\ x=-4 \end{cases}$

گزینه ۳

۳

$x\sqrt{-x}\times\sqrt[3]{x}=(-x)\sqrt{-x}\,\sqrt[3]{-x}=(-x)^1(-x)^{\frac{1}{2}}(-x)^{\frac{1}{3}}=(-x)^{\frac{11}{6}}=\sqrt[6]{(-x)^{11}}=\sqrt[6]{-x^{11}}$

گزینه ۳

۴

$\tan(a+b)=4$

$\tan(a-b)=3$

$\longrightarrow \tan(2b)=\tan((a+b)-(a-b))=\frac{\tan(a+b)-\tan(a-b)}{1+\tan(a+b)\tan(a-b)}=\frac{4-3}{1+4\times 3}=\frac{1}{13}$

گزینه ۱

۵

$f(f(3+2\sqrt{2}))=f(-2-\sqrt{2})=-2-\sqrt{2}+\sqrt{2}=-2$

$f(3+2\sqrt{2})=-(3+2\sqrt{2})+\sqrt{3+2\sqrt{2}}=-(1+\sqrt{2})^2+\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}=-3-2\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=-2-\sqrt{2}$

گزینه ۴

۶

$[\sqrt{4n^2+2n+1}]=2n \qquad [\sqrt{a^2n^2+2an+1}]=an\ ;\ n\in\mathbb{N}$

$4n^2<4n^2+2n+1<4n^2+4n+1 \to (2n)^2<4n^2+2n+1<(2n+1)^2 \to 2n<\sqrt{4n^2+2n+1}<2n+1$

گزینه ۳

۷

$f(x)=2x+3$

$g(f(x))=8x^2+22x+20$ $\Big\}\to g(2x+3)=8x^2+22x+20$

$2x+3=t \to x=\frac{t-3}{2} \Rightarrow g(t)=8\left(\frac{t-3}{2}\right)^2+22\left(\frac{t-3}{2}\right)+20$

$\Rightarrow g(t)=2(t-3)^2+11(t-3)+20 \to f(g(t))=2g(t)+3=4(t-3)^2+22(t-3)+43$

$\Rightarrow f(g(t))=4t^2-2t+13$ گزینه ۳

راه دوم: $g(f(x))=8x^2+22x+20 \xrightarrow{x=0} g(f(0))=20 \xrightarrow{f(0)=3} g(3)=20 \longrightarrow f(g(3))=f(20)$

$f(20)=43 \longrightarrow$ گزینه ۳ $4x^2-2x+13\Big|_{x=3}=43$ ✓ . گزینه‌ای که این برابری را درست کند جواب است.

۸

$0/a\bar{6}=\frac{a6-a}{90}=\frac{a+8}{30} \Rightarrow \frac{10a+6-a}{90}=\frac{a+8}{30} \Rightarrow 9a+6=3a+24 \to 6a=18$

$\to a=3$

گزینه ۱

۹

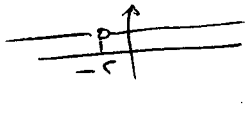
$y=\operatorname{sgn}(ax^2+4x+4)$

$ax^2+4x+4\Big|_{x=-2}=0 \to 4a-8+4=0 \to a=1$

که در این صورت $=\operatorname{sgn}((x+2)^2)=\operatorname{sgn}(x^2+4x+4)$

$\left.\begin{matrix} 0 \leftarrow x=-2 \leftarrow (x+2)^2=0 \\ 1 \leftarrow (x+2)^2>0 \end{matrix}\right\}$

گزینه ۲



۱۰ گزینه ۲ ✓ درس ۵

$\frac{n}{10n+1} \to$ حد $= \frac{1}{10}$ صعودی $a_1 = \frac{1}{11}$ $\times$ | $\frac{n+1}{10n+11} \to$ حد $= \frac{1}{10}$ صعودی $a_1 = \frac{2}{21} \to \frac{1}{11} < \frac{2}{21}$

$\frac{1}{n+12} \to$ حد $=$ صفر ، $a_1 = \frac{1}{13}$ نزولی $\times$ | $\frac{n}{n+12} \to$ حد $= 1$ صعودی $a_1 = \frac{1}{13}$

$\frac{1}{11} < \quad < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{n}{11n} < \quad < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{n+1}{11n+10}$

$\frac{1}{11} < \quad < \frac{n}{10n} \Rightarrow \frac{n+10}{10n+11}$

---

۱۱ گزینه ۴

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \frac{0}{0} \to \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x} = 1+\cos x\Big|_{x=0} = 2 \to f(0)=2$

---

۱۲ گزینه ۱

$\frac{3+x}{2x^2-bx} \to = 0 \to x(2x-b)=0 \to \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{b}{2} \end{cases} \to \left|\frac{b}{2}-0\right| = 3 \to \left|\frac{b}{2}\right| = 3 \to \begin{cases} b=6 \ \times \\ b=-6 \ \checkmark \end{cases}$

---

۱۳ گزینه ۲

ش.ع $y=2x+1 \to f(1)=3$ ، $f'(1)=2$

$\lim_{x\to 1} \frac{f^2(x)+4f(x)-18}{x-1} = \frac{0}{0} \to \lim_{x\to 1} \frac{(f(x)+6)(f(x)-\overset{f(1)}{3})}{x-1} = (f(1)+6)\,f'(1) = (3+6)\times 2 = 18$

---

۱۴ گزینه ۲

$y = |x^5 - x^3| = |x^3(x^2-1)|$ ، $f'(0)=0$ ، $f'(\pm 1)$ ناموجود

---

۱۵ گزینه ۱

$f(x) = \sqrt{3x+1} \xrightarrow{[1,a]} \frac{f(a)-f(1)}{a-1} = \frac{\sqrt{3a+1}-2}{a-1} \to \frac{\sqrt{3a+1}-2}{a-1} = \frac{3}{10} \to a=21$

$f'(8) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} = \frac{3}{10}$

---

۱۶ گزینه ۳

$y=(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3) \Rightarrow x^6 + 6x^4 + \cdots \to y^{(4)} = \frac{6!}{(6-4)!}x^{6-4} + 6\times 4!$

$= 360 + 144 = 504$

---

۱۷ گزینه ۱

$(f^{-1})'_{(f(x))} = \frac{1}{5} = \frac{1}{f'(x)} \to f'(x)=5 \to f'(x) = \sqrt{9+f^2(x)}$

$5 = \sqrt{9+f^2(x)} \to f^2(x) = 16$

---

۱۸ گزینه ۴

$x^3+y^3-6xy=0 \to y'_x = -\frac{3x^2-6y}{3y^2-6x}\Big|_{(\frac{4}{3},\frac{8}{3})} = -\frac{3\times\frac{16}{9} - 6\times\frac{8}{3}}{3\times\frac{64}{9} - 6\times\frac{4}{3}}$

$= -\frac{\frac{16}{3}-\frac{48}{3}}{\frac{64}{3}-\frac{24}{3}} = \frac{\frac{32}{3}}{\frac{40}{3}} = \frac{32}{40} = \frac{8}{10} =$

۱۹ گزینه ۱

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} = \frac{\ominus\oplus - \oplus\oplus}{\oplus} = \frac{\ominus + \ominus}{\oplus} = \ominus \rightarrow$$ آزمون هشترودی

---

۲۰ گزینه ۴

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 4\sqrt[4]{\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{d} \times \frac{d}{a}} = 4$$

---

۲۱ گزینه ۲

$$y = x^2 e^{-x} \rightarrow y' = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = (2x - x^2) e^{-x}$$

$$y'' = (2 - 2x) e^{-x} - (2x - x^2) e^{-x} = e^{-x}(2 - 4x + x^2) = 0$$

$$\downarrow$$

$$2 \pm \sqrt{2} \rightarrow \begin{matrix} x > 2 + \sqrt{2} \\ x < 2 - \sqrt{2} \end{matrix}$$

---

۲۲ گزینه ۳

$$\int \frac{x}{(x+1)^3} dx = \int \frac{x+1-1}{(x+1)^3} dx = \int \frac{dx}{(x+1)^2} - \int \frac{dx}{(x+1)^3} = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-2x - 2 + 1}{2(x+1)^2} = \frac{-2x - 1}{2(x+1)^2}$$

---

۲۳ گزینه ۱

$$3x - x^3 \rightarrow 3 - 3x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow y = 2$$

$$\rightarrow S_{\text{هاشور}} = 2 - \int_0^1 (3x - x^3) dx = 2 - \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1$$

$$= 2 - \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right] = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

---

۲۴ گزینه ۴

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx = \int \tan^3 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \tan^3 x (1 + \tan^2 x) dx$$

$$\int u^3 du = \frac{u^4}{4} = \frac{\tan^4 x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}$$

---

۲۵ گزینه ۴

$$\sum_{n=1}^{100} (-1)^{n!} = \underbrace{(-1)^{1!}}_{-1} + \underbrace{(-1)^{2!}}_{1} + \underbrace{(-1)^{3!}}_{1} + \cdots + \underbrace{(-1)^{100!}}_{1} = 98$$

$x=\sqrt{2}+\sqrt{3} \to x^2=5+2\sqrt{6} \to x^2-5=2\sqrt{6} \to x^4-10x^2+25=24 \to x^4-10x^2+1=0$

آزمون ۶

[1] گزینه ۳

---

[2] گزینه ۱

$d=-\frac{1}{4}-(-\frac{1}{3})=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{12} \to a_n=a_1+(n-1)d=-\frac{1}{3}+\frac{(n-1)}{12}$

$a_n<0 \to -\frac{1}{3}+\frac{n-1}{12}<0 \to \frac{n-1}{12}<\frac{1}{3} \to n-1<4 \to n<5 \to$ چهار جمله

---

[3] گزینه ۱

$x=1-\sqrt{2}$

$\frac{1}{x}=\frac{1}{1-\sqrt{2}}\times\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}}{-1}=-1-\sqrt{2}$ $\Big\} \to (x+\frac{1}{x})^{\frac{1}{3}}=(1-\sqrt{2}-1-\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$

$=(-2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}=(-\sqrt{8})^{\frac{1}{3}}=-(2^{3\cdot\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}=-\sqrt{2}$

---

[4] گزینه ۳

$A=(\underbrace{9\sin^2x-24\sin^4x+16\sin^6x}})\cos^2 3x$

$=(3\sin x-4\sin^3x)^2\cos^2 3x=\sin^2 3x\cos^2 3x=(\sin 3x\cos 3x)^2=\frac{1}{4}\sin 6x$

$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{36}} \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{8}$

---

[5] گزینه ۴

$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin\beta=\frac{3}{\sqrt{10}}$ $\quad\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$ $\Big\} \to \sin^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\beta\cos^2\alpha=\frac{1}{5}\times\frac{1}{10}-\frac{9}{10}\times\frac{4}{5}=-0.7$

$\frac{1}{50}-\frac{36}{50}$

یا $\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}[\cos2\alpha-\cos2\beta]$

---

[6] گزینه ۱

$x^2-x-1=0 \to \alpha^2-\alpha-1=0 \to \alpha^2=\alpha+1$

$3\alpha^2+\beta^2=3\alpha+3+\beta+1=4+\underbrace{\alpha+\beta}_{S}+2\alpha=5+2\alpha$ $\Big\} \to 5+2(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$

$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \to \alpha>\beta \to \alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\qquad 5+1+\sqrt{5}=6+\sqrt{5}$

---

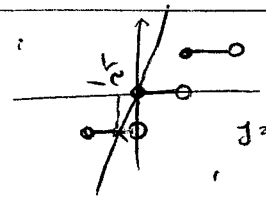
[7] گزینه ۴

$[x]=3x \to 3x\in\mathbb{Z} \to 3x=k \to x=\frac{k}{3}$

$\to [\frac{k}{3}]=k \to k\le\frac{k}{3}<k+1 \to \begin{cases} k\le\frac{k}{3} \to k-\frac{k}{3}\le 0 \to \frac{2k}{3}\le 0 \to k\le 0 \\ \frac{k}{3}<k+1 \to \frac{2k}{3}>-1 \to k>-\frac{3}{2} \end{cases}$

$-\frac{3}{2}<k\le 0 \to k=-1,0 \to x=0,-\frac{1}{3} \xrightarrow{+} -\frac{1}{3}$

راه دوم :



$y=-1 \;,\; y=3x \to x=-\frac{1}{3}$

---

[8] گزینه ۲

$a=-1 \;,\; b=2 \;,\; c=4 \;,\; d=-1$

$x>0 \to \sqrt[3]{x^3+2x}+4x+1 \xrightarrow{x\to -x} \overbrace{\sqrt[3]{x^3-2x}-4x+1}^{f_1(x)} = \overbrace{(\sqrt[3]{ax^3+bx}+cx+d)}^{-f_2(x)}$

---

[9] گزینه ۴

در پنج ضلعی منتظم به ضلع a و قطر d ← نسبت قطر به ضلع = قطر/ضلع = $\frac{d}{a}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

۱۰ گزینه ۱

$[-x^2][-x^3] = [-(2^+)^2][-(2^+)^3] = [-(4^+)][-(8^+)] = [(-4)^-][(-8)^-]$ از راست

$-5 \times -9 = 45$

---

۱۱ گزینه ۳

$\frac{x}{2} - \frac{2x^2+x+1}{4x} = \frac{\cancel{2x^2} - \cancel{2x^2} - x - 1}{4x} = \frac{-x-1}{4x} = -\frac{1}{4}$

---

۱۲ گزینه ۱

$\frac{3\pi}{2}^- \longrightarrow$ تعریف نشده

$\frac{3\pi}{2}^+ \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{\cos(\frac{3\pi}{2}^+)}} = \frac{1}{\sqrt{0^+}} = +\infty$

۱۳ گزینه ۴

---

۱۴ گزینه ۴

$A = \frac{x^2}{2} \to A' = x\,\Big|_{8} = 8$

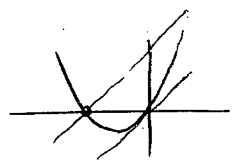
---

۱۵ گزینه ۴

$y = x^2 + x \xrightarrow{x=-1} y = 0 \to (-1,0)$

$\xrightarrow{x=3} y = 12 \to (3,12) \to$ شیب $= \frac{12-0}{3-(-1)} = 3$

$\to y' = 2x+1 = 3 \to 2x+1 = 3 \to x = 1$



---

۱۶ گزینه ۳

$[4x]$ $\xrightarrow{x=0}$ ناپیوسته

$\xrightarrow{x=1}$ "

$\xrightarrow{x=\frac{1}{4}}$ "

$\xrightarrow{x=\frac{1}{8}}$ پیوسته

$\xrightarrow{x=\sqrt{2}}$ پیوسته

---

۱۷ گزینه ۳

$f'(5) + 2f(5) = 1 \xrightarrow{f(5)=2} f'(5) = -3$

$(2,5) \in f^{-1} \longleftrightarrow (5,2) \in f \to f(5) = 2$

$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(5)} = \frac{1}{-3}$

---

۱۸ گزینه ۲

$y^6 + x^4 + 2x^2y^3 = 0 \xrightarrow{x=-2} y^6 + 16 + 8y^3 = 0 \to y^6 + 8y^3 + 16 = 0$

$(y^3+4)^2 = 0 \to y^3 = -4$

$y'_x = -\frac{4x^3 + 4xy^3}{6y^5 + 6x^2y^2}\Big|_{(-2,\sqrt[3]{-4})} = -\frac{-32+32}{} = \frac{0}{0}$ ✗

$y^6 + x^4 + 2x^2y^3 = 0 \longrightarrow (y^3+x^2)^2 = 0 \to y^3 + x^2 = 0 \to y = -\sqrt[3]{x^2}$

$y' = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\Big|_{x=-2} = \frac{2}{3\sqrt[3]{2}}$

---

۱۹ گزینه ۴

$y = \frac{4}{x+1} \to y' = -\frac{4}{(x+1)^2}$

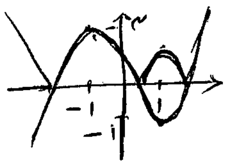
هر کس که سعی در آن نمود شد شدت نزول بیشتری دارد.

آزمون ۶

۲۵ گزینه ۱

$x^3-3x+1=0$

$(x^3-3x+1)'=0 \to 3x^2-3=0 \to x=\pm 1$



$\to$ ۵ جواب

---

۲۶ گزینه ۳

$$\int \frac{\sin 6x}{\sin x \cos x}dx = 2\int \frac{\sin 6x}{\sin 2x}dx = 2\int \frac{3\sin 2x - 4\sin^3 2x}{\sin 2x}dx$$

$$=\int 6 - 8\sin^2 2x = 6x - 8\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx = 6x - 4\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right)$$

$$= 2x + \sin 4x = Ax + \sin Bx \to A=2\ ,\ B=4$$

---

۲۷ گزینه ۳

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4 x \tan x\, dx = \int \frac{1}{\cos^4 x} \times \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int \frac{\sin x}{\cos^5 x}dx$$

$$u=\cos x \to du = -\sin x\, dx \Rightarrow -\int \frac{du}{u^5} = (-)\int u^{-5} = \frac{1}{4}\times\frac{1}{u^4} = \frac{1}{4u^4} = \frac{1}{4\cos^4 x}$$

$$\frac{1}{4\cos^4 x}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}\left(\cancel{\frac{1}{4}} \cancel{-\ldots} - \cancel{\frac{1}{4}(4-\frac{1}{4})}\right) = \cancel{\frac{1}{16}}\ \frac{3}{4}$$

---

۲۸ گزینه ۱

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{3}{4} \to S_A = \frac{3}{4}S_B$$

$$\int_0^p \sin x\, dx = \frac{3}{4}\int_p^{\pi} \sin x\, dx \to -\cos x\Big|_0^p = \frac{3}{4}(-\cos x)\Big|_p^{\pi}$$

$$\Rightarrow \cancel{-}(\cos p - \cos 0) = \cancel{-}\frac{3}{4}(\cos\pi - \cos p) \to \cos p - 1 = \frac{3}{4}(-1-\cos p)$$

$$-\frac{3}{4}+1 = \cos p + \frac{3}{4}\cos p \to \frac{1}{4} = \frac{7}{4}\cos p \to \cos p = \frac{1}{7}$$

---

۲۹ گزینه ۴

$$\sum_{n=1}^{100} n^2 \cos n\pi = \sum_{n=1}^{100} (-1)^n n^2 = -1+4-9+16-25+36+\cdots = 100^2$$

$$-1^2+2^2-3^2+4^2-5^2+6^2+\cdots-99^2+100^2$$

$$2^2-1^2+4^2-3^2+6^2-5^2+\cdots+100^2-99^2$$

$$3+7+11+\cdots+199 = \frac{50}{2}(2\times 3 + 49\times 4) = \frac{50}{2}(3+199) = 25\times 202 = 5050$$

$$\text{تعداد} = \frac{199-3}{4}+1 = \frac{196}{4}+1 = 50$$

$\boxed{1}$ گزینه ۱

$$\left.\begin{array}{l} y=2x^2+(m+1)x+m+4 \\ y=x \end{array}\right\} \to 2x^2+(m+1)x+m+4=x$$

$$2x^2+mx+m+4=0 \xrightarrow{\Delta=0} m^2-8(m+4)=0 \to m^2-8m-48=0 \to (m-12)(m+4)=0 \to \begin{cases} m=12 \\ m=-4 \end{cases}$$

$$m=12 \to 2x^2+12x+18=2(x+3)^2=0 \to x=-3 \ \times$$

$$\boxed{m=-4} \to 2x^2-4x+2=2(x-1)^2=0 \to x=1 \ \checkmark$$

$\boxed{2}$ گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l} a_1=3+\sqrt{2} \\ a_2=5+\sqrt{2} \end{array}\right\} \to d=a_2-a_1=2 \to S_4=\frac{4}{2}\left(2(3+\sqrt{2})+3\times 2\right)=2(6+2\sqrt{2}+6)=24+4\sqrt{2}$$

$$\to a_5=3+\sqrt{2}+4\times 2=11+\sqrt{2}$$

مجموع چهار جمله دوم : $S'_{5-8}=\frac{4}{2}\left(2(11+\sqrt{2})+3\times 2\right)=56+4\sqrt{2} \to$ اختلاف $=32$

$\boxed{3}$ گزینه ۱

$$3^{2x-1}=2^{x+1} \to \frac{9^x}{3}=2^x\times 2 \to \left(\frac{9}{2}\right)^x=6 \to \log_{\frac{9}{2}}\left(\frac{9}{2}\right)^x=\log_{\frac{9}{2}}6$$

$$\to x=\log_{4.5}6=\log_{4.5}4+1=\log$$

$\boxed{4}$ گزینه ۱

$$\cancel{\frac{1.5-1.5\tan^2 10}{2-6\tan^2 10}\times\cot 80=\frac{1.5(3-\tan^2 10)}{2(1-3\tan^2 10)}\times\cot 80}$$

$$\cancel{\tan\left(\frac{\pi}{3}-10\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}+10\right)\times\cot 80}$$

$$\cancel{\tan 50\,\tan 70\,\cot 80 \to \tan 50\,\tan 70\,\tan 80} \quad \tan 30$$

$$\frac{1.5-1.5\tan^2 10}{2-6\tan^2 10}=\frac{1}{4}\times\frac{\tan^2 60-\tan^2 10}{1-\tan^2 60\,\tan^2 10}=\frac{1}{4}\times\tan 50\,\tan 70\times\cot 80=\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{12}$$

$\boxed{5}$ گزینه ۴

$$f=(a^2-5)x^2+4x+b-1 \xrightarrow{f>0 \to (1,3)} a^2-5<0 \to |a|<\sqrt{5}$$

$x=1,3 \to$ ریشه‌ها $\to \begin{array}{l} S=4 \\ P=3 \end{array} \to x^2-Sx+P=0 \to -x^2+4x-3=0$

$$(a^2-5)x^2+4x+b-1=$$

$$a^2-5=-1 \to a=\pm 2$$

$$b-1=-3 \to \boxed{b=-2}$$

$\boxed{6}$ گزینه ۲

$$\cos 6x\cos 4x=\frac{1}{2}\cos 10x \to \frac{1}{2}(\cos 10x+\cos 2x)=\frac{1}{2}\cos 10x$$

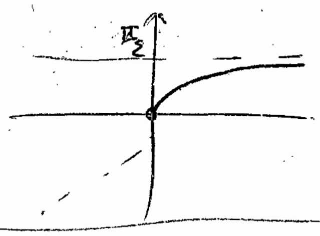
$$\to \frac{1}{2}\cos 2x=0 \to \cos 2x=0 \to 2x=k\pi+\frac{\pi}{2} \to x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$$

$$k=0 \to x=\frac{\pi}{4}$$

$$k=1 \to x=\frac{3\pi}{4}$$

$$\pi$$

آزمون ۷ — [۷] گزینه ۲



$a>0$ و

---

[۸] گزینه ۱

$$y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\frac{e^x+\frac{1}{e^x}}{e^x-\frac{1}{e^x}}=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\to ye^{2x}-y=e^{2x}+1$$

$$\to ye^{2x}-e^{2x}=y+1\to e^{2x}=\frac{y+1}{y-1}$$

$$\to 2x=\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)\to x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)\to f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

---

[۹] گزینه ۱

$$\frac{A}{3+\sqrt{2}}+\frac{B}{3-\sqrt{2}}=C\to\frac{3A-A\sqrt{2}+3B+B\sqrt{2}}{7}=\frac{3(A+B)+(B-A)\sqrt{2}}{7}\in Q$$

$$\to B-A=0\to A=B\to\frac{3(A+A)}{7}=C\to\frac{6A}{7}=C\to\boxed{\frac{C}{A}=\frac{6}{7}}$$

---

[۱۰] گزینه ۱

$$\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\frac{+2\sin\left(\frac{x+\sin x}{2}\right)\sin\left(\frac{x-\sin x}{2}\right)}{x^4}$$

$$\sim\frac{2\sin\left(\frac{2x}{2}\right)\sin\left(\frac{x^3}{12}\right)}{x^4}=\frac{2x\times\frac{x^3}{12}}{x^4}=\frac{1}{6}$$

---

[۱۱] گزینه ۳

$$y=\sqrt{|x|(x-1)}\to|x|(x-1)\geq0\xrightarrow{|x|\geq0}x-1\geq0\to x\geq1$$

$$\to D_f=\{0\}\cup[1,+\infty)$$

---

[۱۲] گزینه ۳

$y=\frac{x}{1-\cos x}\to 1-\cos x=0\to x=2k\pi$ مضاعف ← قابل رفع $x=0$

$y=\frac{\sin^2 x}{x}\to$ قابل رفع $x=0$

$y=\frac{[x]}{x}\begin{cases}\xrightarrow{0^+}0\\ \xrightarrow{0^-}\frac{-1}{0^-}=+\infty\end{cases}$ حذفی

---

[۱۳] گزینه ۳

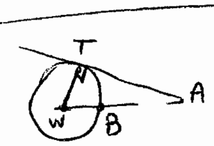
$$\lim_{h\to0}\frac{f^3(1+h)-f^3(1)}{h}\xrightarrow{Hop}\lim_{h\to0}\frac{3f^2(1+h)f'(1+h)}{1}=3f^2(1)f'(1)=3\times1^2\times\frac{2}{9}$$

$$=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

$$f=\sqrt[9]{x^2}\to\begin{cases}f(1)=1\\ f'(1)=\frac{2}{9\sqrt[9]{x^7}}=\frac{2}{9}\end{cases}$$

---

[۱۴] گزینه ۴



$AT^2+TW^2=AW^2$

$$AT^2=AW^2-TW^2\to AT=\sqrt{x^2-4}\Rightarrow(AT)'=\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\Big|_{x=4}=\frac{4}{\sqrt{16-4}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{12}}=\frac{4\sqrt{12}}{12}=\frac{\sqrt{12}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

آزمون ۷

۱۵ گزینه ۲

$f(x) = [\cos \pi x] \xrightarrow{x=\frac{1}{7}} f = [\cos \frac{\pi}{7}] = [0 < \, < 1] = 0 \longrightarrow f'(\frac{1}{7}) = 0$

$\xrightarrow{x=-\frac{3}{7}} f = [\cos(-\frac{3\pi}{7})] = [0 < \, < 1] = 0 \longrightarrow f'(-\frac{3}{7}) = 0$

---

۱۶ گزینه ۲

$y = \frac{1}{x} \longrightarrow y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

---

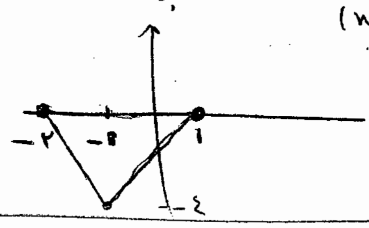
۱۷ گزینه ۳

$f = (x-1)|x^2+x-2| \longrightarrow ((x-1)^2(x+2))' = 2(x-1)(x+2) + (x-1)^2$

$(x+2)$ ریشه $x=1 \longrightarrow f'(1) = 0$ ، $f'(-2)$ ناموجود

$(x-1)(2x+4+x-1) = (x-1)(3x+3)$

$x = 1, -2, -1$ بحرانی



$\frac{3 \times 4}{2} = 6$

---

۱۸ گزینه ۱

$\max\{(3\sin^2 x + 2)(3\cos^2 x + 3)\} = 16$

$3\sin^2 x + 2 + 3\cos^2 x + 3 = 3(\sin^2 x + \cos^2 x) + 5 = 8 \longrightarrow \underline{3\sin^2 x + 2} = 4 = \underline{3\cos^2 x + 3}$

---

۱۹ گزینه ۴

$y = x|x^2 - 4x| \longrightarrow x = 0 , x = 4$

$\longrightarrow (x^3 - 4x^2)' \longrightarrow 3x^2 - 8x = 0 \longrightarrow x(3x-8) = 0 \longrightarrow x = 0 , x = \frac{8}{3}$ بحرانی

$y = x|x^2 - 4x| \longrightarrow x = 0$ [illegible]

$\longrightarrow (x^3 - 2x^2)' = (2x^2 - 8x) = 2x - 8 = 0 \longrightarrow x = \frac{4}{2}$

---

۲۰ گزینه ۴

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \longrightarrow f'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

$\int f' dx = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} = \sqrt{x^2+1} + C \longrightarrow F(x) = \sqrt{x^2+1} + C \xrightarrow{x=0} F(0) = C + 1 =$

$\boxed{C = 0}$

$F(x) = \sqrt{x^2+1} + 0 \xrightarrow{x=1} \sqrt{2}$

---

۲۱ گزینه ۴

$\int_0^1 \frac{dx}{x - 2\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{(\sqrt{x}-1)^2 - 1} = \alpha$

$\int_0^1 \frac{dx}{x - 2\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = 2 \int \frac{du}{u} = 2\ln|u| = 2\ln|\sqrt{x} - 2| \Big|_0^1 = 2(\ln 1 - \ln 2)$

$= 2(0 - \ln 2) = -2\ln 2$

$u = \sqrt{x} - 2 \longrightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

آزمون ۸

$A = \alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha} \longrightarrow A^2 = \alpha^2\beta + \beta^2\alpha + 2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta} = \alpha\beta(\alpha+\beta) + 2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta} = 1\times 5 + 2 = 7 \longrightarrow A = \sqrt{7}$

$x^2 - 5x + 1 = 0 \longrightarrow S = 5,\ P = 1$

۱ گزینه ۴

$S_n = 2n^2 - 3n \longrightarrow d = 4$

$a_7 = S_7 - S_6 = (\underbrace{2(7)^2}_{98} - \underbrace{3(7)}_{21}) - (\underbrace{2(6)^2}_{72} - \underbrace{3(6)}_{18}) = 77 - 54 = 23$

۲ گزینه ۴

$(\log_{10}5)^2 + \log_{10}2\,\log_{10}5 + \log_{10}2$

$\log_{10}5\,(\underbrace{\cancel{\log_{10}5 + \log_{10}2}}_{1}) + \log_{10}2 = 1$

۳ گزینه ۱

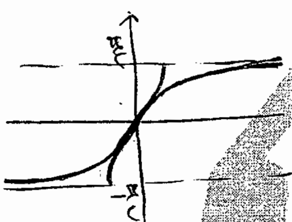
$(\sqrt{7})^2 = 3^2 + 1^2 - 2(3)(1)\cos\theta \rightarrow 7 = 10 - 6\cos\theta \rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

۴ گزینه ۱

---

۵ گزینه ۳

$\tan^{-1}x = \sin^{-1}x$



$\longrightarrow x = 0$

$\tan^{-1}x = \sin^{-1}x$

$\underbrace{\sin(\tan^{-1}x)}_{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} = \underbrace{\sin(\sin^{-1}x)}_{x} \longrightarrow \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x \longrightarrow x = 0$

۶ گزینه ۳

$y = x^2 + [x^2] \longrightarrow [y] = [x^2 + [x^2]] \longrightarrow [y] = 2[x^2] \longrightarrow [x^2] = \frac{[y]}{2}$

$\longrightarrow y = \frac{[y]}{2} + x^2 \longrightarrow x^2 = y - \frac{[y]}{2} \longrightarrow x = \pm\sqrt{y - \frac{[y]}{2}} \longrightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x - \frac{[x]}{2}}$

۷ گزینه ۲

$[\frac{1}{x}] \begin{cases} x>0 \rightarrow 1 \geq 0 \\ x<0 \rightarrow -1 \end{cases}$ ✓ | ۲ ✓ |

۸ گزینه ۴

$\lim_{x\to 2^-} \frac{\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(\frac{x}{2})}{\sqrt{2-x}} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\cos^{-1}\frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}} = \lim \frac{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}{\sqrt{2-x}} = \frac{\sqrt{\cancel{1-\frac{x}{2}}}\sqrt{1+\frac{x}{2}}}{\sqrt{2}\sqrt{\cancel{1-\frac{x}{2}}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$

۹ گزینه ۴

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0 \rightarrow$ همگرا $\rightarrow$ کراندار

$a_1 = \frac{1}{2}$ نزولی

مرز = صفر

۱۰ گزینه ۱

آزمون ۵

۱۱) گزینه ۱

$$f=\left[\operatorname{Cot}\frac{1}{x}\right]\xrightarrow{\frac{4}{\pi}^-}\left[\underbrace{\operatorname{Cot}\frac{\pi}{4}^+}_{\text{نزولی}}\right]=[1^-]=0$$

$$\xrightarrow{\frac{4}{\pi}^+}\left[\operatorname{Cot}\frac{\pi}{4}^-\right]=[1^+]=1=f\left(\frac{\pi}{4}\right)\to$$ از راست پیوسته

۱۲) گزینه ۲

$$y=3-\sqrt{1-\frac{2}{x+1}}\xrightarrow{+\infty}3-1^-=2^+$$

$$\xrightarrow{-\infty}3-1^+=2^-$$

۱۳) گزینه ۳

$$y=\operatorname{Cos}\frac{x}{2}+\underbrace{\operatorname{Sgn}(\sqrt{x})}_{0,1}\xrightarrow{x=\pi}y=0+1=1\to(\pi,1)$$

$$y'=-\frac{1}{2}\operatorname{Sin}\frac{x}{2}\Big|_{x=\pi}=-\frac{1}{2}$$

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-\pi)\to 2y-2=\pi-x\to 2y+x=\pi+2$$

۱۴) گزینه ۴

$$f=x\operatorname{Cos}x-\operatorname{Sin}x\to f'=\operatorname{Cos}x-x\operatorname{Sin}x-\operatorname{Cos}x=-x\operatorname{Sin}x$$

x	-2π		$-\pi$		0		π		2π
f'	0	+	0	−	0	−	0	+	0
f									

۱۵) گزینه ۴

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}=2f'(1)=3\to f'(1)=\frac{3}{2}$$

$$y=f(x^2)\to y'=2x\,f'(x^2)\Big|_{x=1}=2f'(1)=2\times\frac{3}{2}=3$$

۱۶) گزینه ۳

$$(f^{-1})'(3)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{2x|_{x=2}}=\frac{1}{4}$$

$$(3,\bigcirc)\in f^{-1}\to(\bigcirc,3)\in f\Rightarrow x^2-1=3\to\begin{cases}x=2 ✓\\ x=-2 ✗\end{cases}$$

$$\sqrt[3]{x-1}=3\to x-1=27\to x=28\ ✗$$

۱۷) گزینه ۳

۱۸) گزینه ۴

$$y=\frac{x^2}{x-1}=\frac{x^2-1+1}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1}\xrightarrow{(10)}y^{(10)}=0+\frac{(-1)^{10}\times 10!}{(x-1)^{11}}=10!$$

۱۹) گزینه ۴

$$x^3-3x^2+4=x^3+1-3x^2+3=(x^3+1)-3(x-1)(x+1)=(x+1)(x^2-x+1-3x+3)$$

$$=(x+1)(x^2-4x+4)=(x+1)(x-2)^2$$

$$x=-1,\ 2\quad ✗\ ✗$$

$$3x^2-6x=0\to x=0,\ 2\quad ✓\ ✗$$

آزمون ۸

۲۰ گزینه ۳

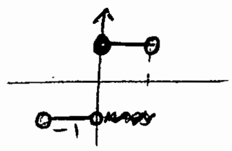
$B = (\log_2 x)(\log_2 y) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

$xy = \sqrt{2} \longrightarrow \log_2 xy = \log_2 \sqrt{2} \longrightarrow \log_2 x + \log_2 y = \frac{1}{2}$

۲۱ گزینه ۱

$-1 < x < 0 \longrightarrow (-1)^{[-1<0]} = (-1)^{(-1)} = -1$

$0 < x < 1 \longrightarrow (-1)^{[0<<1]} = 1$



۲۲ گزینه ۴

$\int \frac{\sqrt{1+\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u\sqrt{u} = \frac{2}{3}\sqrt{u^3} = \frac{2}{3}\sqrt{(1+\sin^{-1}x)^3} + C$

$F(0) = 1$

۲۳ گزینه ۴

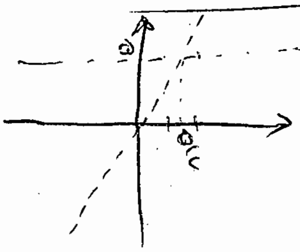
$\int_0^2 x^{[x]}dx = \int_0^1 x^0\,dx + \int_1^2 x^1\,dx = 1 + \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = 1 + 2 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

۲۴ گزینه ۱

$a_n = \operatorname{Sgn}(n^2 - 5n) = \underbrace{(-1)+(-1)+(-1)+(-1)}_{-4} + 0 + \underbrace{1 + 1 + \cdots}_{95} = 91$

a_1

۲۵ گزینه ۳



$[0,6] \longrightarrow [0,2][2,4][4,6] \longrightarrow \Delta x = 2$

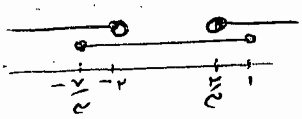
$L = 2(4+5+5) = 28$

$U = 2(5 + \underset{8+12}{\cancel{}}) = 50 \longrightarrow U - L = 22$

۱ گزینه ۲ — آزمون ۹

$4\le 3x^2+4x\le 7 \to 3x^2+4x-7\le 0 \to (x-1)(3x+7)\le 0 \to -\frac{7}{3}\le x\le 1$

$3x^2+4x\ge 4 \to 3x^2+4x-4\ge 0 \to (3x-2)(3x+6)\ge 0 \to x\le -2$ یا $x\ge \frac{2}{3}$



---

۲ گزینه ۲

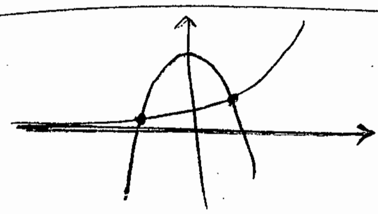
$2S_3-3S_2=9 \to 2S_3-2S_2-S_2 = 2(\underbrace{S_3-S_2}_{a_3})-\underbrace{S_2}_{a_1+a_2} = 2a_3-a_1-a_2=9$

$\Rightarrow (\underbrace{a_3-a_2}_{d})+(\underbrace{a_3-a_1}_{2d})=9 \to 3d=9 \to d=3 \to a_3-a_2=3$

---

۳ گزینه ۳

$e^x+x^2=4 \to e^x=4-x^2$



۲ جواب

---

۴ گزینه ۲

$(\sqrt{2})^2=(1+\sqrt{3})^2+2^2-2(1+\sqrt{3})2\cos\theta \to 2=4+2\sqrt{3}+4-(4+4\sqrt{3})\cos\theta$

$\cos\theta=\frac{6+2\sqrt{3}}{4+4\sqrt{3}}=\frac{2(3+\sqrt{3})}{4(1+\sqrt{3})}=\frac{3+\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{(1+\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \to \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2} \to \theta=\frac{\pi}{6}=30^\circ$

---

۵ گزینه ۳

$\frac{x^3+ax^2+bx+6}{\underbrace{x^2-x-2}_{(x-2)(x+1)}}$, $\frac{0}{0}$ $\Rightarrow f(2)=0 \to 8+4a+2b+6=0 \to 2a+b=-7$

$f(-1)=0 \to -1+a-b+6=0 \to a-b=-5 \to a=-4,\ b=1$, $a+b=$

---

۶ گزینه ۳

$A=\cos^2(\tan^{-1}2)=\frac{1}{1+\tan^2(\tan^{-1}(2))}=\frac{1}{1+2^2}=\frac{1}{5}$

---

۷ گزینه ۲

$\sin\frac{\pi x}{3} \to T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$

---

۸ گزینه ۳

$2\le a^2-|a|<2+6 \to 0\le |a|^2-|a|-2<6 \to 0\le(|a|-2)(|a|+1)<6$

$|a|-2=0 \to a=\pm 2 \to \max\{2,-2\}=2$

$|a|+1=0 \to \times$

---

۹ گزینه ۳

$\lim_{x\to 0.1^+}\frac{1}{1+\log x}=\frac{1}{1+\log(\frac{1}{10})^+}=\frac{1}{1+(-1)^+}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

---

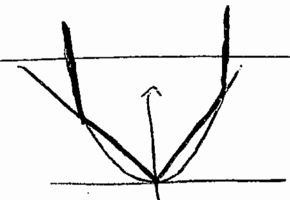
۱۰ گزینه ۴

$\lim_{n\to\infty}(\cos\frac{1}{n})+1=2\neq 1$

---

۱۱ گزینه ۱

$y=\begin{cases}x^2 & x^2\ge 2|x|\\ 2|x| & x^2<2|x|\end{cases} \to y=\max\{x^2,|2x|\}$



مرجع ساده است

12 گزینه ۲ اگر صفر

$y = x\cot^{-1}x \to m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\cot^{-1}x}{x} = \lim_{x\to\infty}\cot^{-1}x \quad \begin{cases} +\infty \to 0 \\ -\infty \to \pi \end{cases}$

13 گزینه ۳

$y = \sin(x^\circ) \Rightarrow y' = \frac{\pi}{180}\cos x^\circ \Big|_{x^\circ = 45^\circ} = \frac{\pi}{180}\times\frac{\sqrt{2}}{2} =$

14 گزینه ۳

15 گزینه ۲

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \to \sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

$\left(y = \sin^3 x\right)^{(4)} = \left(\frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)\right)^{(4)} = \frac{1}{4}(3\sin x - 81\sin 3x)\Big|_{x=\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4}\left(3\times\frac{\sqrt{3}}{2} - 81\times 0\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

16 گزینه ۴

$S_{MBH} = \frac{1}{16}S_{ABCD} = \frac{1}{16}a^2 \to \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{16}(2.1)^2 - \frac{1}{16}(2)^2}{2.1 - 2} = \frac{10}{16}\times(4.41 - 4) = \frac{10}{16}\times 0.41 =$

17 گزینه ۳

$y = \sqrt[3]{\sin^2 x} \longrightarrow y' = \frac{2\cos x}{3\sqrt[3]{\sin x}} = 0 \longrightarrow \cos x = 0 \longrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$f(\frac{\pi}{2}) = 1$

در $x=0$ بازگشت ← min به عرض صفر

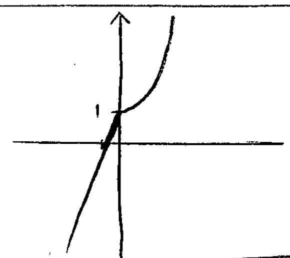
Extr مجموع عرض $= 0 + 1 = 1$

18 گزینه ۳

$8x^3 \geq 8x^3 - 5x^2 \longrightarrow 2x \geq \sqrt[3]{8x^3 - 5x^2} \longrightarrow 2x - \sqrt[3]{8x^3 - 5x^2} \geq 0$

19 گزینه ۱

$f = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ 2x + 1 & x < 0 \end{cases}$



f پیوسته و اکیداً صعودی

↓

f^{-1} پیوسته و اکیداً صعودی

20 گزینه ۲

$e^{y-2x} + x^3 - y^2 = 0 \longrightarrow y'_x = -\frac{-2e^{y-2x} + 3x^2}{e^{y-2x} - 2y}\Bigg|_{(1,2)} = -\frac{-2+3}{1-4} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$

21 گزینه ۱

$f = \frac{4x}{4x+1} \xrightarrow[n=4]{[0,1]} \Delta x = \frac{1}{4} \longrightarrow U(f) = \frac{1}{4}\left(f(\tfrac{1}{4}) + f(\tfrac{2}{4}) + f(\tfrac{3}{4}) + f(1)\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{30+40+45+48}{60}\right) = \frac{1}{4}\times\frac{163}{60}$

$\hookrightarrow f' = \frac{4}{(4x+1)^2} > 0$ صعودی

22 گزینه ۱

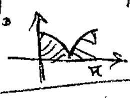
$\int\sqrt{4x^2 + x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\sqrt{4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}u\sqrt{u} = \frac{1}{3}(4+x^2)\sqrt{4+x^2} = \frac{\sqrt{8}}{3}(4+x^2)$

$\sqrt{8} = \sqrt{4+x^2} \longrightarrow x^2 = 4 \longrightarrow \begin{cases} x = 2 \;\checkmark \\ x = -2 \;\times \end{cases}$

۳۴ گزینه ۴

$$\int_0^{\pi} (|\cos x| + |\sin x|)\,dx = \int_0^{\pi} |\cos x|\,dx + \int_0^{\pi} |\sin x|\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,dx + \int_0^{\pi} \sin x\,dx$$ = ۲ + ۲ = ۴



۳۶ گزینه ۴

$$\sum_{i=a+1}^{۱۲} (b+i)^{۳} = \sum_{i=1}^{۱۲-a} (a+b+i)^{۳}$$

$f(i) \rightarrow f(i) = (a+b+i)^{۳} \Rightarrow f(b-a) = (a+b+b-a)^{۳} = ۸b^{۳}$

~~۳۵ گزینه ۵~~

۱۵

$\boxed{1}$ گزینه ۱

$$\sqrt{x^2+2x-15}+\sqrt{x^3-x^2+m}+\sqrt{x^2+x-12}=0 \longrightarrow \text{جواب مشترک } x=3$$

$(x+5)(x-3)$, $(x+4)(x-3)$

$$3^3-3^2+m=0 \longrightarrow m=-18$$

$\boxed{2}$ گزینه ۲

$$\frac{2.5\pi}{2\pi}=\frac{x}{60'} \longrightarrow x=75'$$

$\boxed{3}$ گزینه ۳

$$y=a\sin b\pi x \longrightarrow T=\frac{2\pi}{|b\pi|}=\frac{2}{|b|}=6 \longrightarrow |b|=\frac{1}{3}$$

$$|a|=2 \quad \Longrightarrow \quad b=\frac{1}{3},\ a=2 \qquad b=-\frac{1}{3},\ a=-2$$

$$y'=ab\pi\cos b\pi x\Big|_{x=0}=ab\pi>0 \longrightarrow a,b \text{ هم‌علامت}$$

$\boxed{4}$ گزینه ۳

$$f(8)=5 \longrightarrow f(x)=(x-8)Q_1(x)+R$$

$$f(x^3)=(x-2)(x^2+2x+4)Q(x)+R \xrightarrow{x=2} f(8)=5$$

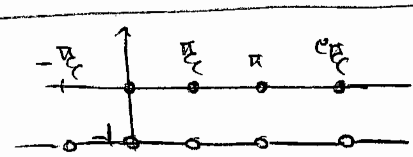
$\boxed{5}$ گزینه ۳

$$f(1-x)=2x-x^2 \xrightarrow{x=1} f(0)=1 \xrightarrow{\text{گزینه ۳}} f(\sin x)=\cos^2 x$$

روش دوم: $f(1-x)=-(x^2-2x+1-1)=-(1-x)^2+1 \longrightarrow f(t)=1-t^2 \longrightarrow f(\sin x)=1-\sin^2 x=\cos^2 x$

$\boxed{6}$ گزینه ۲

$$y=[\sin x]+[-\sin x]=\begin{cases}0 & \sin x\in\mathbb{Z} \longrightarrow x=\frac{k\pi}{2}\\ -1 & \sin x\notin\mathbb{Z} \longrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}\end{cases}$$



$\boxed{7}$ گزینه ۴

$$y=\frac{f(x)+|f(x)|}{2} \xrightarrow{f(x)>0} y=f(x) \quad (0\le x\le a)$$

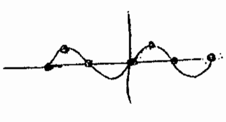
$$f(x)<0 \longrightarrow y=0 \quad (x\le 0 \text{ یا } x\ge a)$$

$\boxed{8}$ گزینه ۴

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x+1}-2\sqrt{x}}{\sqrt{9x+1}-3\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+1-4x}{9x+1-9x}\times\frac{\sqrt{9x+1}+3\sqrt{x}}{\sqrt{4x+1}+2\sqrt{x}}=\frac{3\sqrt{x}+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+2\sqrt{x}}=\frac{3}{2}$$

$\boxed{9}$ گزینه ۱

$\boxed{10}$ گزینه ۴



$$y=[\sin x] \xrightarrow{[-2\pi,2\pi]} \left\{-2\pi,-\frac{3\pi}{2},-\pi,-\frac{\pi}{2},0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi\right\}$$

سر بازه صعود پیوسته

min نسبی ← پیوسته

min نسبی ← پیوسته

۶ نقطه ناپیوسته

$\boxed{11}$ گزینه ۴

$$y=\sqrt{\frac{4x^3-4x^2+5}{x-1}}-2x=\sqrt{\frac{4x^2(x-1)+5}{x-1}}-2x=\sqrt{4x^2+\frac{5}{x-1}}-2x \longrightarrow |2x|-2x$$

$+\infty$: 0 ; $-\infty$: $-4x$

قائم $x=1$

۱۲ گزینه ۱

$g(x)=f(x)+e^x \xrightarrow{x=1} g'(1)=f'(1)+e \xrightarrow[\text{زوج } g]{\text{فرد } f'} g'(-1)=-f'(-1)+e$ (I)

$\xrightarrow{x=-1} g'(-1)=f'(-1)+\frac{1}{e}$ (II)

(I), (II) $\longrightarrow 2f'(-1)=e-\frac{1}{e}$

$(f+g)'_{(-1)}=f'(-1)+g'(-1)=f'(-1)+f'(-1)+\frac{1}{e}=2f'(-1)+\frac{1}{e}=e-\frac{1}{e}+\frac{1}{e}=e$

---

۱۳ گزینه ۳

$f=128^{\log_{\sqrt{2}}x}+e^{2\ln x}=x^{14}+x^2 \longrightarrow f'=14x^{13}+2x\Big|_{x=1}=16$

---

۱۴ گزینه ۴

راه اول: $\tan\left(\tan^{-1}\frac{x+1}{x-1}+\tan^{-1}x\right)=\dfrac{\frac{x+1}{x-1}+x}{1-x\frac{x+1}{x-1}}=-1 \longrightarrow f(x)=-\frac{\pi}{4}$ یا $\frac{3\pi}{4}$ ($x<1$ ، $x>1$)

$\longrightarrow f(10)+f(-10)=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=+\frac{\pi}{2}$

$f(10)+f(-10)=\tan^{-1}\frac{11}{9}+\tan^{-1}10+\tan^{-1}\frac{-9}{-11}+\tan^{-1}(-10)=\tan^{-1}\frac{11}{9}+\tan^{-1}\frac{9}{11}=\frac{\pi}{2}$

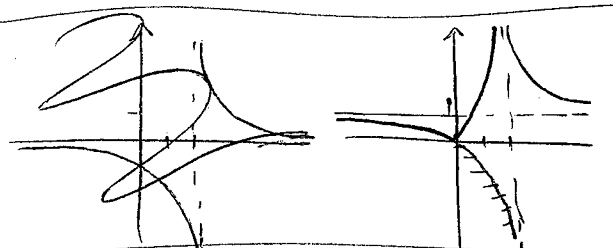
راه دوم: $\tan^{-1}A+\tan^{-1}B=\tan^{-1}\frac{A+B}{1-AB} \Rightarrow \tan^{-1}\frac{1+x}{x-1}=-\tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=-\left(\tan^{-1}1+\tan^{-1}x\right)$

$\Rightarrow f(x)=\tan^{-1}\frac{x+1}{x-1}+\tan^{-1}x=-\left(\tan^{-1}1+\tan^{-1}x\right)+\tan^{-1}x=-\tan^{-1}1=-\frac{\pi}{4}$

---

۱۵ گزینه ۳

رسم :



$\longrightarrow$ نزولی $(-\infty,0)$

---

۱۶ گزینه ۴

$\int\tan^3x=\int\tan x(\tan^2x)=\int\tan x(1+\tan^2x-1)=\int\tan x(1+\tan^2x)dx-\int\tan x\,dx$

$=\frac{\tan^2x}{2}+\ln|\cos x|$

---

۱۷ گزینه ۴

$\int_{\log\frac{1}{2}}^{\log 2}(x^5+[x^2])dx=\int_{-\log 2}^{\log 2}\cancel{x^5dx}+\underbrace{\int_{-\log 2}^{\log 2}[x^2]}_{-\log 2}=-\log 2=\log\frac{1}{2}$

---

۱۸ گزینه ۱

$\sum\frac{3k(k+1)+1}{k^3(k+1)^3}=\sum\frac{3k^2+3k+1}{k^3(k+1)^3}=\sum\frac{(k+1)^3-k^3}{k^3(k+1)^3}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}-\frac{1}{(k+1)^3}$

$=1-0=1$

۱۹ گزینه ۱

راه اول: $2x+y=a \to 2x=y=\frac{a}{2} \to x=\frac{a}{4},\ y=\frac{a}{2} \to \max(xy)=\frac{a}{4}\times\frac{a}{2}=\frac{a^2}{8}$ (1)

راه دوم: $A=xy=x(a-2x)=ax-2x^2 \to A'=a-4x=0 \to x=\frac{a}{4} \to A(\frac{a}{4})=\frac{a}{4}(a-\frac{a}{2})=\frac{a^2}{8}$

---

۲۰ گزینه ۲

راه اول: $y=\frac{x^2+3x+1}{x^2+1} \to x^2+3x+1=yx^2+y \to (1-y)x^2+3x+1-y=0$

$\xrightarrow{\Delta\geq 0} 9-4(1-y)^2\geq 0 \to -\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{5}{2} \to$ مقادیر صحیح ۰، ۱، ۲

روش دوم: $y=\frac{x^2+3x+1}{x^2+1}=1+\underbrace{\frac{3x}{x^2+1}}_{g} \Rightarrow R_f=1+$ برد $g=1+[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]=[-\frac{1}{2},\frac{5}{2}]$

$y=\frac{ax}{x^2+1} \to$ برد $=[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]$

---

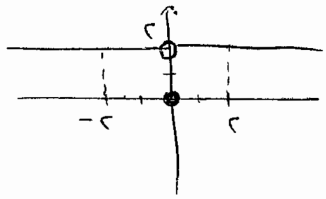
۲۱ گزینه ۳

$y=x+\sqrt{x^2+2} \to y'=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}>0 \to$ اکیداً صعودی

---

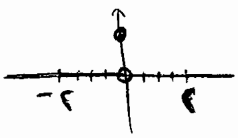
۲۲ گزینه ۴

$f=\begin{cases}2 & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases} \xrightarrow[n=8]{[-2,2]} \Delta x=\frac{1}{2}$



$U_8(f)=\frac{1}{2}(\underbrace{2+2+\cdots+2}_{8})=8$

$f=\begin{cases}2 & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$



$\frac{1}{2}(0+0+0+0+2+2+0+0+0+0)=2$

---

۲۳ گزینه ۲

$f(c)=\frac{c^2+1}{c^2}=1+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{6}\int_2^8(\frac{x^2+1}{x^2})dx \Rightarrow 1+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{6}\times(6+\frac{3}{8})$

$\int_2^8(1+\frac{1}{x^2})dx=x-\frac{1}{x}\Big|_2^8=(8-\frac{1}{8})-(2-\frac{1}{2})=6-\frac{1}{8}+\frac{4}{8}=6+\frac{3}{8}$

$1+\frac{1}{c^2}=1+\frac{1}{16} \to c=4$

---

۲۴ گزینه ۱

$y=\sqrt{x+8} \to M(x,\sqrt{x+8}),\ O(0,0) \to T=OM=\sqrt{x^2+x+8}$

$\Rightarrow T'=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+8}}\Big|_{x=7}=\frac{15}{2\times 8}=\frac{15}{16}$

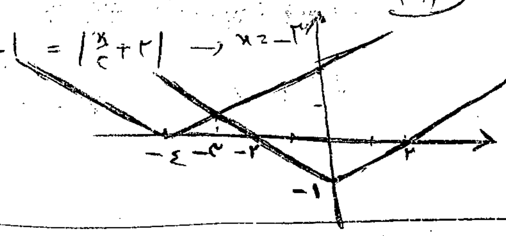
(۱۱)

۱ گزینه ۲

$y = \left|\frac{x}{2}\right| - 1$

$y = \left|\frac{x+4}{2}\right| - 1 + 1 = \left|\frac{x+4}{2}\right| = \left|\frac{x}{2}+2\right|$

$\Big\} \rightarrow \left|\frac{x}{2}\right| - 1 = \left|\frac{x}{2}+2\right| \rightarrow x = -3$



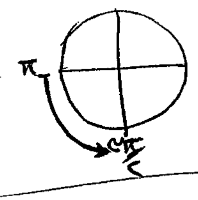
---

۲ گزینه ۴

$\frac{(x+1)(x^{40} - x^{39} + \dots - x^3 + x^2 - x + 1)}{x+1} = \frac{x^{41}+1}{x+1}$

---

۳ گزینه ۲



$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \rightarrow -1 < \sin\alpha < 0 \rightarrow -1 < \frac{2m}{3} - 1 < 0$

$\rightarrow 0 < \frac{2m}{3} < 1 \rightarrow 0 < 2m < 3 \rightarrow 0 < m < \frac{3}{2}$

---

۴ گزینه ۳

$f = \frac{x^2+4x+5}{x^2+4x+7} = 1 - \frac{2}{x^2+4x+7} = 1 - \frac{2}{(x+2)^2+3} \overset{x=\sqrt{2}-2}{=\!=} 1 - \frac{2}{(\sqrt{2}-2+2)^2+3} = \frac{3}{5}$

---

۵ گزینه ۴

$x^4 + x^2 + x \;\big|\; x^2 - x + 1$, quotient $x^2 + x + 1$

$-x^4 + x^3 - x^2$

$x^3 + x$

$-x^3 + x^2 - x$

x^2

$-x^2 + x - 1$

$(x-1)$

$\Rightarrow x^4 + x^2 + x \;\big|\; x^3 + 1 \Rightarrow (x)\, x + x^2 + x = x^2$

$x^2 \;\big|\; x^2 - x + 1$, quotient 1

$-x^2 + x - 1$

$(x-1)$

---

۶ گزینه ۴

$x + \sqrt{y+2} = 2 \xrightarrow{x=-2} \sqrt{y+2} = y+2 \longrightarrow y = -2 \;,\; y = -1$ ✗

$x = y^3 - 4y + 1 \xrightarrow{x=1} y^3 - 4y = 0 \longrightarrow y = 0, \pm 2$ ✗

$x = |2y+1| + y \xrightarrow{x=0} |2y+1| = -y \longrightarrow y = -\frac{1}{3} \;,\; -1$ ✗

---

۷ گزینه ۴

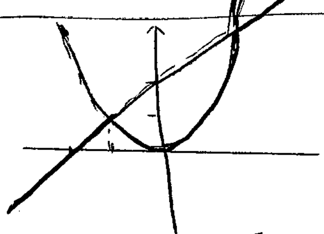
$y = \tan x + |\tan x|$ $\xrightarrow{\tan x \geq 0}$ $y = 2\tan x$ (ربع اول سوم)

$\tan x \leq 0$: $y = 0$ (ربع دوم چهارم)

---

۸ گزینه ۴

$y = \min\{x^2, x+2\}$ برد $= \mathbb{R}$



$y = \max\{x^2, x+2\} \longrightarrow$ برد $= [1, +\infty)$

---

۹ گزینه ۱

$\lim_{x \to 0^+} (\ln x - \log x) = (-\infty - (-\infty)) = (\infty - \infty)$ مبهم $\Longrightarrow -\infty$

$\lim_{x \to 0^+} \left(\ln x - \frac{\ln x}{\ln 10}\right) = \frac{\ln 10 \cdot \ln x - \ln x}{\ln 10}$

(۱۱)

۱۰ گزینه ۴

$b_n = \sqrt{n+64} - \sqrt{n+6} = \dfrac{58}{\sqrt{n+64}+\sqrt{n+6}}$

$n>30 \longrightarrow n+6>36 \longrightarrow \sqrt{n+6}>6$

$\quad \hookrightarrow n+64>94 \longrightarrow \sqrt{n+64}>8 \;(+)$

$\sqrt{n+64}+\sqrt{n+6}>14 \longrightarrow 0<\dfrac{1}{\sqrt{n+64}+\sqrt{n+6}}<\dfrac{1}{14} \to 0<b_n<2$

---

۱۱ گزینه ۲ $\qquad (x=0)$

---

۱۲ گزینه ۲

$y=\dfrac{x\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}+1} = \dfrac{x\sqrt[3]{x}+x+1-x}{\sqrt[3]{x}+1} = x+\dfrac{1-x}{\sqrt[3]{x}+1} \longrightarrow x=-1$ قائم

حد ندارد

---

۱۳ گزینه ۱

$f(x)=\ln|x^2-1| \xrightarrow{x=\frac12} f=\ln(1-x^2) \to f'=\dfrac{-2x}{1-x^2}\Big|_{x=\frac12}=\dfrac{-1}{\frac34}=-\dfrac43$

---

۱۴ گزینه ۱

$f(x)=|x-1|+[x] \quad \xrightarrow{0<x<1} f=-x+1+0 \Rightarrow f'=-1$

$\qquad\qquad\qquad\quad \xrightarrow{1<x<2} f=x-1+1 \Rightarrow f'=1$

در $x=1$ زاویه دار — در کل ناپیوسته $x\in\mathbb{Z}$

$f=\begin{cases} x<1: & -x+1+\text{عدد} \longrightarrow f'=-1 \\ x>1: & x-1+\text{عدد} \longrightarrow f'=1 \end{cases}$

در $x\in\mathbb{Z}$ مشتق ندارد $\qquad x\in\mathbb{Z} \notin D_{f'}$

---

۱۵ گزینه ۴

$f(x)=\begin{cases} a\ln x+b & x\geq 1 \\ e^{x-1}+cx & x<1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 1^+: b \\ 1^-: 1+c \end{matrix} \to b=c+1 \to \boxed{b=-1}$

$f'=\begin{cases} \frac{a}{x} & x\geq 1 \\ e^{x-1}+c & x\leq 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (1^+)': a \\ (1^-)': 1+c \end{matrix} \to a=c+1, \; \boxed{c=-2}$

$f''=\begin{cases} -\frac{a}{x^2} & x>1 \\ e^{x-1} & x<1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (1^+)'': -a \\ (1^-)'': 1 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{a=-1}$

---

۱۶ گزینه ۱

$S_p=\dfrac{S'_x}{P'_x}=\dfrac{(x^2)'}{(4x)'}=\dfrac{2x}{4}=\dfrac{x}{2}\Big|_{x=8}=4$

---

۱۷ گزینه ۱

$y=\dfrac{\cos x}{4+2\cos x} \to 4y+2y\cos x=\cos x \to 4y=\cos x(1-2y) \to \cos x=\dfrac{4y}{1-2y}$

$-1\leq\cos x\leq 1 \to -1\leq\dfrac{4y}{1-2y}\leq 1 \to$

$\begin{cases} -1\leq\frac{4y}{1-2y} \to \frac{4y}{1-2y}+1\geq 0 \to \frac{4y+1-2y}{1-2y}\geq 0 \to \frac{2y+1}{1-2y}\geq 0 \to -\frac12\leq y<\frac12 \\ \frac{4y}{1-2y}\leq 1 \to \frac{4y}{1-2y}-1\leq 0 \to \frac{4y-1+2y}{1-2y}\leq 0 \to \frac{6y-1}{1-2y}\leq 0 \to y\leq\frac16 \text{ یا } y>\frac12 \end{cases}$

برد $\cos x \equiv$ برد y

$\sin x=0 \to x=k\pi \to y(k\pi)=\frac16, -\frac12$

نقطه $x=0$ صحیح است.

$-\frac12 \quad 0 \quad \frac16 \quad \frac12$

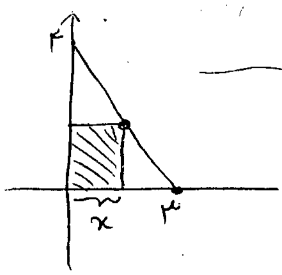
یا لازم $\quad y_1=\dfrac{4+2\cos x}{\cos x}=\dfrac{4}{\cos x}+2$

$-1\leq\cos x\leq 1 \to \begin{cases} 0<\cos x\leq 1 \to \frac{4}{\cos x}\geq 4 \to 2+\frac{4}{\cos x}\geq 6 \to y\leq\frac16 \\ -1\leq\cos x<0 \to \frac{4}{\cos x}\leq -4 \to 2+\frac{4}{\cos x}\leq -2 \to y\geq -\frac12 \end{cases}$

۱۸ گزینه ۱ — عرض‌های Ext همان عرض نقاط توخالی در نمودار مشخص شده است پس:

$(-x^3+3x^2+m)' = -3x^2+6x=0 \to \begin{cases} x=0 \to f(0)=m= \text{عرض توخالی} \\ x=2 \to f(2)=-8+12+m=m+4=\text{عرض توپر}=n+1 \end{cases}$

$\to n-m=3$



۱۹ گزینه ۱

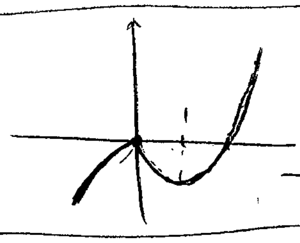
$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1 \to \frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$

$S=(x)(f_{(x)}) = x\times\left(4-\frac{4x}{3}\right) = 4x-\frac{4x^2}{3} \to S'=4-\frac{8x}{3}=0 \to x=\frac{3}{2}$

$\max(S)=S\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\left(4-\frac{4\times\frac{3}{2}}{3}\right)=3$

۲۰ گزینه ۴

$y=|x|(x-2)$



$y=|x|(x-2)=\begin{cases} x>0: & x^2-2x \\ x<0: & 2x-x^2 \end{cases}$

$\to$ نزولی $(0,1)$

۲۱ گزینه ۲

$\sum_{k=1}^{98}(k+1)(k+1)! = \sum_{k=1}^{98}(\underbrace{k+1+1-1}_{})(k+1)! = \sum_{k=1}^{98}(k+2)!-(k+1)! = (98+2)!-(1+1)!$

$=100!-2!$

۲۲ گزینه ۱

$\int_{-2}^{3} x([x]+[-x])dx = \int_{-3}^{+3} \underbrace{x([x]+[-x])}_{\text{فرد}}dx - \int_{-3}^{-2} x([x]+[-x])dx$

$=-\int_{-3}^{-2} x(-1)dx = +\int_{-3}^{-2}+x\,dx = \int_{-3}^{-2}x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-3}^{-2} = \frac{4}{2}-\frac{9}{2}=-\frac{5}{2}$

۲۳ گزینه ۱

$y=\frac{1}{x} \xrightarrow[n]{[1,4]} \Delta x=\frac{3}{n} \to L_n(f)=\frac{3}{n}\sum f(x_i)=\frac{3}{n}\sum f\left(1+\frac{3i}{n}\right)$

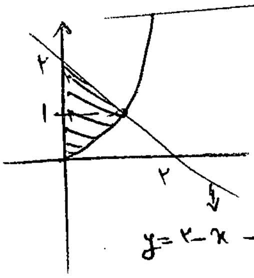
نزولی

$x_i=1+\frac{3i}{n}$

$=\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{3i}{n}} \xrightarrow{n=300} \frac{3}{300}\sum\frac{1}{1+\frac{i}{100}} = \frac{1}{100}\sum\frac{100}{100+i}=\sum\frac{1}{100+i}$

$x_{i-1}=1+\frac{3(i-1)}{n} \to U_n(f)=\frac{3}{n}\sum f(x_{i-1})=\dots=\sum_{i=100}\frac{1}{i}$

۲۴ گزینه ۲



$y=2-x \to x=2-y$

$S_{\text{هاشور}}=\int_0^1\sqrt{y}\,dy+\int_1^2(2-y)dy=\frac{2}{3}y\sqrt{y}\Big|_0^1+2y-\frac{y^2}{2}\Big|_1^2$

$=\frac{2}{3}+(4-2)-\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}+2-\frac{3}{2}=2+\frac{4-9}{6}=2-\frac{5}{6}=\frac{7}{6}$

$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{4+3}{6}=\frac{7}{6}$

راه دوم: $S_{\text{هاشور}}=S_{\text{مثلث}}-\int_0^1x^2dx-\int_1^2(2-x)dx=\frac{2\times2}{2}-\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^1-\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)_1^2=2-\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{12}{6}-\frac{2}{6}-\frac{3}{6}=\frac{7}{6}$