آزمون پایانی نوبت اول سال تحصیلی ۹۶-۹۵	باسمه تعالی دبیرستان کمال	نام درس: دیفرانسیل
نام و نام خانوادگی:		نام دبیر: ترکیبی - ندایی پور
		زمان: ۱۲۰ دقیقه
		تاریخ: ۹۵/۱۰/۴
پایه چهارم ریاضی		تعداد صفحات: ۱

برگه سؤال

ردیف	سوال	بارم
۱	برای هر قسمت مثال مناسب بزنید . ۱. تابع f که فقط در نقطه x=۱ حد داشته باشد . ۲. دنباله ای از اعداد گویا مثال بزنید که به $\sqrt{5}$ همگرا باشد .	۱
۲	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید . ۳. تابع $f(x)=\begin{cases} x-[x] & x\in\mathbb{Q} \\ x & x\in\mathcal{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ در $x=0$ حد دارد . ۴. اگر f در $x=a$ و g در $x=a$ پیوسته باشند آنگاه fog در $x=a$ پیوسته است . ۵. اگر a گویا و b گنگ باشد آنگاه $a+b$ و $\frac{b}{a}$ و $\frac{a}{b}$ و $\log_a b$ گنگ خواهد بود . ۶. دنباله $(1-\frac{1}{n})^n$ نزولی است .	۲
۳	مجموعه جواب نا معادله $\frac{x-1}{x+2} > \frac{5x+1}{x^2+7x+10}$ را شامل یک بازه متقارن با بیشترین شعاع همسایگی بیابید .	۲
۴	کوچکترین عدد طبیعی m را چنان بیابید که به ازای هر $n \geq m$ ، فاصله جملات دنباله $a_n=\frac{2n^2+1}{n^2+4}$ از مقدار همگرایی آن کوچکتر از $\frac{1}{100}$ باشد .	۲
۵	همگرایی دنباله $a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}$ و $a_1=1$ را اثبات و سپس مقدار همگرایی آن را بیابید .	۲
۶	به کمک دنباله ها ثابت کنید تابع $f_{(x)}=\sin\frac{\pi}{x-1}$ در $x=1$ حد ندارد .	۲
۷	حدود زیر را بیابید (بدون هوپیتال و هم ارزی) ۱. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos 3x}-\sqrt{\cos x}}{2x^2}$ ۲. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)\left[\frac{1}{x-1}\right]$ ۳. $\lim\limits_{x\to 4}(\frac{x+6}{x^2-16}-\frac{x+1}{x(x-4)})$	۳
۸	تابع $f_{(x)}=\begin{cases} x^2 & x^2<\lvert x\rvert \\ \lvert x\rvert & x^2\geq\lvert x\rvert\end{cases}$ در چند نقطه ناپیوسته است ؟	۱
۹	تابع $y=[\sin\pi x]$ در بازه $[0,2]$ چند نقطه نا پیوستگی دارند ؟	۲
۱۰	نقطه برخورد خطوط مجانب تابع $f_{(x)}=\frac{x^3+x^2-2}{x^2+x-2}$ را بیابید .	۲
۱۱	مجانب مایل تابع $y=2x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ را بیابید .	۱

دیفرانسیل

۱ تست ۱ : $f(x)=\begin{cases} x & x\in Q \\ 1 & x\in R-Q \end{cases}$

تست ۱ : $a_n = \dfrac{[\sqrt{5}n]}{n}$

۲ تست ۳ نادرست — تست ۴ نادرست

تست ۵ نادرست — تست ۶ نادرست

۳

$$\frac{5x+1}{x^2+7x+10} > \frac{x-1}{x+2} \Rightarrow \frac{5x+1}{(x+2)(x+5)} - \frac{x-1}{x+2} > 0 \rightarrow \frac{(5x+1)-(x+5)(x-1)}{(x+2)(x+5)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-x-6}{(x+2)(x+5)} < 0 \rightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{(x+2)(x+5)} < 0 \rightarrow x \in (-5,3)-\{-2\}$$

$\rightarrow$ $(-2,3)$ شرط همسایگی شدن

۴

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2+4} = 2 \quad \forall \varepsilon>0,\ \exists M\in\mathbb{N} : n\geq M \rightarrow \left|\frac{2n^2+1}{n^2+4} - 2\right| < \varepsilon = \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{2n^2+1-2n^2-8}{n^2+4}\right| < \frac{1}{100} \rightarrow \frac{7}{n^2+4} < \frac{1}{100} \rightarrow n^2+4 > 700 \rightarrow n^2 > 696$$

$$\rightarrow n > 26 \rightarrow n \geq 27$$

۵

$a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}$, $a_1 = 1$: $1, \sqrt{7}, \sqrt{6+\sqrt{7}}, \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{7}}}, \ldots$

صعودی : دنباله صعودی $\rightarrow a_{n+1} > a_n \rightarrow \sqrt{6+a_n} > a_n \rightarrow a_n^2 - a_n - 6 < 0$

$$\rightarrow (a_n-3)(a_n+2) < 0 \rightarrow -2 < \underbrace{a_n < 3}$$

ادعا: $a_n < 3 \rightarrow a_1 < 3$ ✓

فرض: $a_k < 3 \rightarrow 6+a_k < 9 \rightarrow \sqrt{6+a_k} < 3 \rightarrow a_{k+1} < 3$

حکم: $a_{k+1} < 3$

پس ثابت شد که این دنباله صعودی و از بالا کراندار است پس طبق قضیه همگرا خواهد بود.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} \rightarrow L = \sqrt{6+L} \rightarrow L^2 - L - 6 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} L = 3 & ✓ \\ L = -2 & ✗ \end{cases}$$

دنباله همگرا به ۳

$a_n = \frac{2}{n}+1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1 \;,\; \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \sin\frac{\pi}{\frac{2}{n}+1-1} = \sin\frac{n\pi}{2}$ واگرا (۶)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos 3x}-\sqrt{\cos x}}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{4x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x\,\sin x}{4x^2}$$ (۷)

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2}{2}\times\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{\sin x}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to 1}(x^2-1)\left[\frac{1}{x-1}\right] : \quad \frac{1}{x-1}-1<\left[\frac{1}{x-1}\right]\le\frac{1}{x-1} \xrightarrow{x^2-1>0} (x^2-1)\left(\frac{1}{x-1}-1\right)<(x^2-1)\left[\frac{1}{x-1}\right]\le\frac{x^2-1}{x-1}$$

$$\to \underbrace{(x+1)-(x^2-1)}_{\to\, 2} < (x^2-1)\left[\frac{1}{x-1}\right] \le \underbrace{x+1}_{\to\, 2} \Rightarrow \lim_{x\to 1}(x^2-1)\left[\frac{1}{x-1}\right] = 2$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x+4}{x^2-16}-\frac{x+1}{x(x-4)} = \lim_{x\to 4}\frac{(x+4)x-(x+1)(x+4)}{x(x-4)(x+4)} = \lim_{x\to 4}\frac{\overbrace{x^2+4x-x^2-5x-4}^{(x-4)}}{x(x-4)(x+4)} = \frac{1}{32}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x^2<|x| \\ |x| & x^2\ge|x| \end{cases} \Rightarrow f(x)=\min\{x^2, |x|\}$$ (۸)

چون $|x|$, x^2 همه جا پیوسته اند پس

max , min آنها نیز پیوسته خواهد بود.

$y=[\sin \pi x]$ (۹)

min نسبی ← پیوسته

$\pi x = \frac{k\pi}{2} \to x=\frac{k}{2} \xrightarrow{[0,2]} \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$

سر بازه صعودی پیوسته

صعودی

ته بازه ← ناپیوسته

پس فقط در $x=1,2$ و $x=\frac{1}{2}$ ناپیوسته است.

۱۰

$$f(x)=\frac{x^3+x^2-2}{x^2+x-2}$$

$x^2+x-2=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)=0 \rightarrow \begin{cases} x=1 & \times \\ x=-2 & \checkmark \end{cases}$

$x=1$: مجانب قائم نیست و رفع ابهام است

$x=-2$: مجانب قائم

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2-2 & x^2+x-2 \\ \hline -x^3-x^2+2x & x \rightarrow y=x \\ \hline 2x-2 & \end{array}$$

$\begin{cases} y=x \\ x=-2 \end{cases} \Rightarrow$ نقطه برخورد $(-2,-2)$

۱۱

$$y=2x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \rightarrow y=2\left(x+\frac{1-(-1)}{2}\right)=2(x+1)=2x+2$$

۱) $m=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=2$ / $h=\lim_{x\to\infty}(y-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(2x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-2x\right)=$

$\Rightarrow y=mx+h \Rightarrow y=2x+2$ یا

۲) $y=2x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=2x\sqrt{\frac{x-1+2}{x-1}}=2x\sqrt{1+\frac{2}{x-1}}\sim 2x\left(1+\frac{2}{2(x-1)}\right)=2x+\frac{2x}{x-1}$ $\rightarrow 2$

$\Rightarrow y=2x+2$